Infinitesimale kanon. Transformationen, Symmetrietransformationen, Erhaltungsgrößen

infinitesimale kanonische Transformation erzeugt durch

$$F_s(q,P) = F_0(q,P) + s\, f(q,P)$$

mit
- $F_0(q,P) = \sum q_i P_i$, Erzeugende der Identität :
  $p_i = \partial F_0 / \partial q_i = P_i$
  $Q_i = \partial F_0 / \partial P_i = q_i$ ✓
- $f(q,P)$: infinitesimale Erzeugende, bel. wählbar
- s : kontinuierlicher, kleiner Parameter : $|s| \ll 1$

$F_s(q,P)$ erzeugt Transformation

$$p_i = P_i + s\, \frac{\partial f}{\partial q_i}(q,P)$$

$$Q_i = q_i + s\, \frac{\partial f}{\partial p_i}(q,P)$$

in führender Ordnung in s erhalten wir

$$p_i(s) \equiv P_i = p_i - s\, \frac{\partial f}{\partial q_i}(q,p)$$

$$q_i(s) \equiv Q_i = q_i + s\, \frac{\partial f}{\partial p_i}(q,p)$$

d.h

$$\frac{dp_i}{ds} = -\frac{\partial f}{\partial q_i} \quad , \quad \frac{dq_i}{ds} = +\frac{\partial f}{\partial p_i}$$

„Hamiltonsche" Gleichungen der Entwicklung im Parameter s aufgrund infinitesimaler Erzeugenden $f(q,p)$.

⌈ m. a. W.: wir deklarieren eine beliebig gewählte Phasenraumvariable $f(q,p)$ als Hamilton-Fkt und betrachten die daraus resultierende Dynamik in fiktiver Zeit s . ⌋

→ „Hamiltonsches" Vektorfeld bzgl. f :

$$V_f(x) = \left(+ \frac{\partial f_1}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial p_n}, - \frac{\partial f_1}{\partial q_1}, \ldots, - \frac{\partial f_n}{\partial q_n} \right)$$

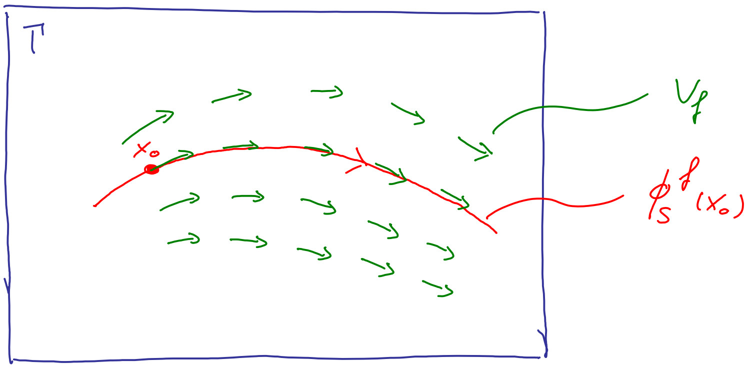
erzeugt „Hamiltonschen" Fluss

$$\begin{aligned} \phi^f : \Gamma \times \mathbb{R} &\longrightarrow \Gamma \\ (x, s) &\longmapsto \phi^f_s(x) \end{aligned}$$

definiert durch

- $\frac{d}{ds} \phi^f_s(x) \overset{!}{=} V_f(\phi^f_s(x))$
- $\phi^f_0(x) \overset{!}{=} x$

d.h. $\phi^f_s(x)$ ist per def. Integralkurve des V.f. V_f durch x bei $s = 0$:



Beispiele

1) $f = H$: Hamilton-Fkt , $s = t$: Zeit

→ ϕ^H_t ist der bekannte Hamiltonsche Fluss ; d.h.

Hamilton-Fkt ist Erzeugende der Zeitentwicklung!

2) $f = \sum_{i=1}^{N} p_i^\nu \equiv P^\nu$: νte Komponente des Gesamtimpulses $\vec{P} = \sum \vec{p}_i$ eines N-Teilchen-Systems

$$\rightarrow \quad \delta p_i^\mu = - \frac{\partial f}{\partial q_i^\mu} \delta s = - \frac{\partial P^\nu}{\partial q_i^\mu} \delta s = 0$$

$$\delta q_i^\mu = + \frac{\partial f}{\partial p_i^\mu} \delta s = \frac{\partial P^\nu}{\partial p_i^\mu} \delta s = \delta_{\mu\nu} \, \delta s$$

$$\to \quad \phi_s^{p^\nu}(\vec{q}_1,\dots,\vec{q}_n,\vec{p}_1,\dots,\vec{p}_n) = (\vec{q}_1+s\vec{e}_\nu,\dots,\vec{q}_n+s\vec{e}_\nu,\vec{p}_1,\dots,\vec{p})$$

Translation um $s\vec{e}_\nu$

Gesamtimpuls ist Erzeugende der Translation

3) $f = L_3$: 3-Komponente des Gesamtdrehimpulses eines N-Teilchen-Systems, in Zylinderkoordinaten r_i, φ_i, z_i mit verallgemeinerten Impulsen $p_{r,i}, p_{\varphi,i}, p_{z,i}$ also

(Erinnerung: $L(r,\varphi,z,\dot r,\dot\varphi,\dot z) = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) - U(r,\varphi,z)$

$\to \quad p_\varphi := \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = m r^2\dot\varphi \overset{!}{=} \ell_3$)

$$L_3 = \sum_{i=1}^{N} p_{\varphi,i}$$

$\to \quad \delta p_{r_i}, \delta p_{\varphi_i}, \delta p_{z_i}, \delta r_i, \delta z_i$ verschwinden,

$$\delta\varphi_i = \frac{\partial L_3}{\partial p_{\varphi,i}}\,\delta s = \delta s$$

$$\to \quad \phi_s^{L_3}(\{r_i,\varphi_i,z_i\},\{p_{r,i},p_{\varphi,i},p_{z,i}\})$$

$$= (\{r_i,\varphi_i+s,z_i\},\{p_{r,i},p_{\varphi,i},p_{z,i}\})$$

Translation der Winkelvariablen φ_i um s

$\equiv$ Rotation um Winkel s um Achse $\vec{e}_3$

Gesamtdrehimpuls ist Erzeugende der Rotation

$\boxed{\begin{array}{l}\underline{\text{Def.}}: \text{ kanonische Transf. } T \text{ ist } \underline{\text{Symmetrietransformation}} \\ \text{des Hamilt. Systems mit Hamilton-Fkt } H \\ :\Longleftrightarrow \quad H(q,p) = H(T(q,p)) + C\end{array}}$

$\longrightarrow$ infinitesimale kanonische Transf. $T_s \equiv \phi_s^f$ mit Erzeugenden $f(q,p)$ ist Symmetrietrafo g.d.w.

$$0 \overset{!}{=} \frac{d}{ds} H(T_s(q,p))\Big|_{s=0} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{ds} + \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{ds} \right)\Big|_{s=0}$$

$$= \sum_i \left(-\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right)$$

$$= -\{H, f\} .$$

Erinnerung

Zeitunabhängige Phasenraumvariable $f : \Gamma \to \mathbb{R}^d$ ist Erhaltungsgröße (unter Hamiltonscher Dynamik erz. durch H)

$$\Longleftrightarrow \qquad \{H, f\} = 0$$

somit gezeigt:

Satz von Noether (in Hamiltonscher Formulierung)

f infinitesimale Erzeugende einer kontinuierlichen Symmetrietransformation

$\overset{!}{\Longleftrightarrow}$

f Erhaltungsgröße .

„Jeder kontinuierlichen Symmetrie entspricht eine Erhaltungsgröße."

Beispiele 1) – 3) zeigen demnach:

kont. Symmetrie bzgl.		inf. Erzeugende	= Erhaltungsgr.
Zeittranslation	$\longleftrightarrow$	H	: Energie
Koordinatentranslation	$\longleftrightarrow$	$\vec{p}$	: Impuls
Rotation	$\longleftrightarrow$	$\vec{L}$	: Drehimpuls

etwas komplizierter wg. expliziter Zeitabhängigkeit der Erhaltungsgröße:

eigentliche Galilei-Transf. $\longleftrightarrow$ $\vec{R}_0 = \vec{R} - \frac{P}{M} t$:

Schwerpkt.