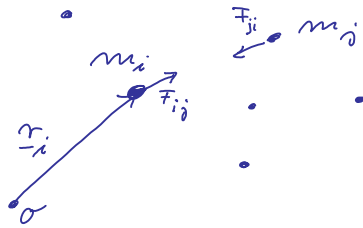


Dynamik eines Newtonschen N-Teilchen Systems

3/1

Massen: $m_1, m_2, \dots, m_N$

Ortsvektoren: $\underline{r}_1(t), \underline{r}_2(t), \dots, \underline{r}_N(t)$, 2.B. Gas, Flüssigkeit, Festkörper, Polymer, ...



Planetensystem,
Sternhaufen, Galaxie,
Galaxienhaufen

- interne Kräfte $\underline{F}_{ij}(\underline{r}_i, \underline{r}_j)$ ($= -\underline{F}_{ji}(\underline{r}_j, \underline{r}_i) \parallel \underline{r}_i - \underline{r}_j$)
 - externe Kräfte $\underline{F}_i^{\text{ex}}(\underline{r}_i)$
- Kraft auf i-tem MP:

$$\underline{F}_i(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N) = \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N \underline{F}_{ij}(\underline{r}_i, \underline{r}_j) + \underline{F}_i^{\text{ex}}(\underline{r}_i)$$

2 $\rightarrow$ N Bewegungsgleichungen $\boxed{m_i \ddot{\underline{r}}_i(t) = \underline{F}_i(\underline{r}_1(t), \dots, \underline{r}_N(t))}$

$\hat{=}$ 3N gekoppelte DGL 2. Ordnung

+ Anfangsorte $\underline{r}_i^0$ + Anfangsgesch. $\underline{v}_i^{(0)}$

3N Bahnen $\underline{r}_1(t), \dots, \underline{r}_N(t)$

- analytische Lösungen i.d.R. nur für $N \leq 2$
- numerische Lösungen ohne Schwierigkeiten für $N \leq 10^4 \dots 10^5$
- allgemeine Aussagen über Schwerpunkt, Gesamtimpuls, Gesamtdrehimpuls, Gesamtenergie möglich!
- System abgeschlossen g. d. u. $\underline{F}_i^{\text{ex}} = 0$

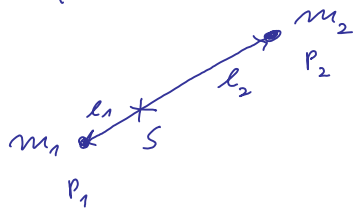
Dynamik von Schwerpunkt, Gesamtimpuls u. Gesamtdrehimpuls

Gesamtmasse $M = \sum_{i=1}^N m_i$

Schwerpunkt (vektor)

$$\underline{R} := \frac{1}{M} \sum_i m_i \underline{r}_i$$

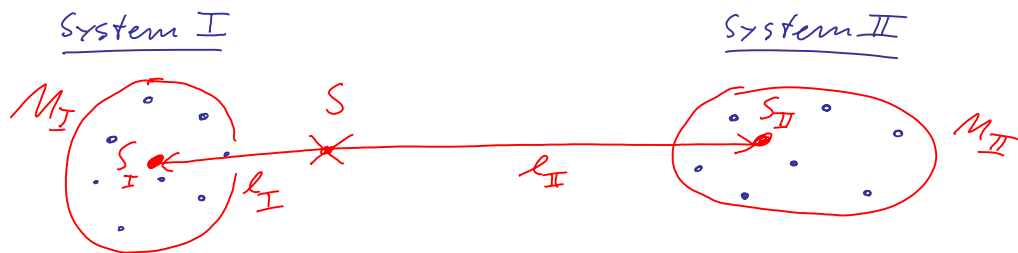
- für $N=2$: Schwerpunkt $S = \sigma + \underline{R}$ teilt $\overline{P_1 P_2}$ im umgekehrten Verhältnis der



Massen: $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_2}{m_1}$

(vgl. Übung)

- Schwerpunkt invariant unter Vergrößerung / Verfeinerung:



Massen $m_1, \dots, m_{N_I}$

Orte $\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_{N_I}$

Schwerpunkt

$$\underline{R}_I = \frac{1}{M_I} \sum_{i=1}^{N_I} m_i \underline{r}_i$$

$m_{N_I+1}, \dots, m_{N_I+N_{II}}$

$\underline{r}_{N_I+1}, \dots, \underline{r}_{N_I+N_{II}}$

$$\underline{R}_{II} = \frac{1}{M_{II}} \sum_{i=N_I+1}^{N_I+N_{II}} m_i \underline{r}_i$$

dann

$$\underline{R} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_i \stackrel{!}{=} \frac{M_I \underline{R}_I + M_{II} \underline{R}_{II}}{M_I + M_{II}}$$

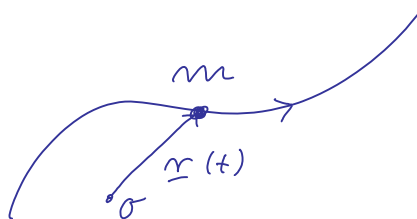
$$M = M_I + M_{II}$$

$$N = N_I + N_{II}$$

$$\frac{l_I}{l_{II}} \stackrel{!}{=} \frac{M_{II}}{M_I}$$

(vgl. Übung)

Impuls eines MPs (bzgl. σ):



$$\underline{p} := m \underline{v} = m \dot{\underline{r}}$$

genügt Bzgl.

$$\dot{\underline{p}} = \underline{F}$$

Drehimpuls eines MPs (bzgl. σ):

$$\underline{L} := \underline{r} \times \underline{p}$$

genügt Bzgl. $\dot{\underline{L}} = \dot{\underline{r}} \times \underline{p} + \underline{r} \times \dot{\underline{p}} = \underline{r} \times \underline{F}$

mit Drehmoment auf MP (bzgl. σ) $\underline{M} := \underline{r} \times \underline{F}$

also

$$\underline{\dot{L}} = \underline{M}$$

Impulserhaltung

Der Gesamtimpuls $\underline{P} = \sum_{i=1}^N \underline{p}_i$ eines abgeschlossenen Systems ist zeitlich konstant.

Beweis mittels Newton II und III als Übung.

Mit $\underline{\dot{R}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{M} \sum_i m \underline{r}_i \right) = \frac{1}{M} \sum_i m \underline{\dot{r}}_i = \underline{P} / M$

folgt aus Impulserhaltung

Schwerpunkterhaltung

Der Schwerpunkt eines abgeschlossenen Systems bewegt sich geradlinig-gleichförmig:

$$\underline{R}(t) = \underline{R}(0) + \frac{\underline{P}}{M} t$$

Schwerpunkt und ^{Gesamt-}Impuls eines abgeschl. Systems verhalten sich also wie Ort und Impuls eines freien MPs:

$$\underline{r}(t) = \underline{r}(0) + \frac{\underline{p}}{m} t$$

ein MP kann damit auch ein N -Teilchen System (geringer Ausdehnung) sein

→ Invarianz des Trägheitsgesetzes unter Verfeinerung.

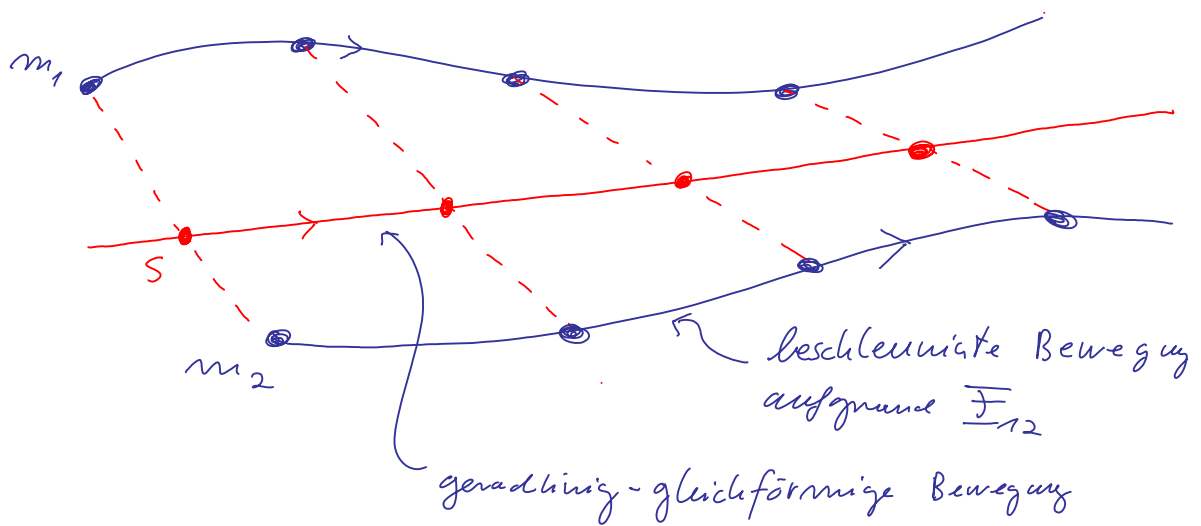
Drehimpulserhaltung

Der Gesamtdrehimpuls $\underline{L} = \sum_i \underline{L}_i$ eines abgeschlossenen Systems ist konstant.

Beweis:

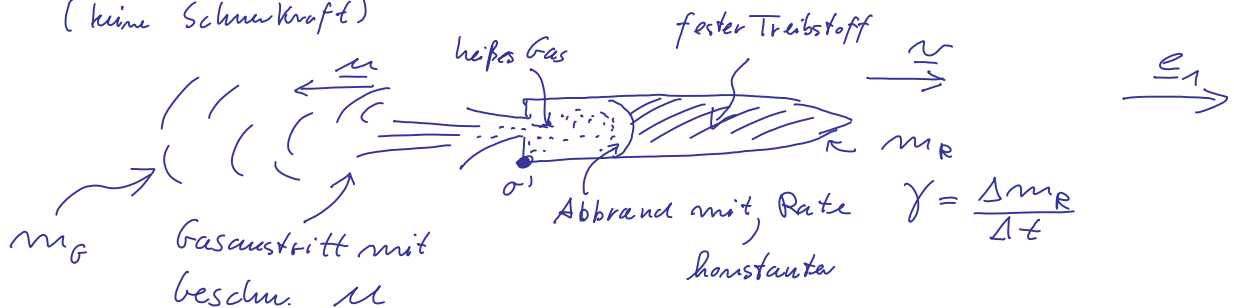
$$\begin{aligned} \underline{\dot{L}} &= \sum_i \underline{\dot{L}}_i = \sum_i \underline{r}_i \times \underline{F}_i = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \underline{r}_i \times \underline{F}_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (\underline{r}_i \times \underline{F}_{ij} + \underline{r}_j \times \underline{F}_{ji}) \\ &\stackrel{\text{III}}{=} \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \underbrace{(\underline{r}_i - \underline{r}_j)}_{=0} \times \underline{F}_{ij} = 0 \end{aligned}$$

Illustration zur Impuls- u. Schwerpunktserhaltung:



Anwendung des Impulssatzes: Beschleunigung einer Rakete

(keine Schwerkraft)



Startgeschw.: $v_0 = 0$
 Startmasse: m_0
 Endmasse: m_1
 Gasgeschw.: u
 Rate: γ

→ Endgeschwindigkeit $v_1 = ?$

momentanes
 Ruhesystem
 der Rakete

Erhaltung der $\underline{e}_1$ Komponente des Gesamtimpulses bzgl. σ^1
 führt auf

$$0 = \dot{p}_{\text{Gas}} + \dot{p}_{\text{Rakete}} = -\gamma u + m_R(t) a(t)$$

d.h.

$$\dot{v}(t) = \frac{\gamma u}{m_R(t)} \rightarrow v_1 - v_0 = \int_0^{t_1} \frac{\gamma u}{m_0 - \gamma t} dt$$

$$\left(m_R(t) = m_0 - \gamma t \right)$$

$$= -u \ln m_1 / m_0$$

also

$$v_1 = u \ln \frac{m_0}{m_1}$$

(Ziolkowski)

kon.

$$m_0 = m_1 e^{v_1/u}$$



$$m_1 \approx 100 \text{ t} \quad (2. + 3. \text{ Stufe} + \text{Mondfähre})$$

$$v_1 \approx 7900 \text{ m/s}$$

$$\rightarrow m_0/m_1 = e^{v_1/u} = e^{3.0} \approx 21 \quad \underline{\underline{(\?)}}$$

d.h. je t Nutzlast 20 t Treibstoff

┌ Tatsächlich: $\frac{m_0}{m_1} = \frac{2900 \text{ t}}{133 \text{ t}} = 22$; mit Schwerkraft ┘