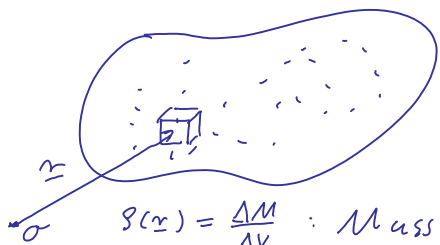


Falls $N \gg 1$ oft Kontinuumsbeschreibung hilfreich:

4/1



$$M = \int_V d^3r' \rho(r')$$

$\rho(r) = \frac{\Delta M}{\Delta V}$: Massendichte

Schwerpunkt $\underline{R} = \frac{1}{M} \int_V d^3r' \rho(r') \underline{r}'$ etc.

Dynamik von Gesamtimpuls, Schwerpunkt und Drehimpuls eines Newtonschen Systems unter externen Kräften:

Massen $m_1, \dots, m_N$

Orte $\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N$

interne Kräfte $\underline{F}_{ij}(\underline{r}_i, \underline{r}_j)$

externe Kräfte $\underline{F}_i^{\text{ex}}(\underline{r}_i)$ (z.B. Schwerkraft (m.G.)
 $\underline{F}_i^{\text{ex}} = m_i \underline{g}$)

→ externe Gesamtkraft: $\underline{F}^{\text{ex}}(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N) := \sum_{i=1}^N \underline{F}_i^{\text{ex}}(\underline{r}_i)$

externes Gesamtdrehmoment: $\underline{M}^{\text{ex}}(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N) = \sum_i \underline{r}_i \times \underline{F}_i^{\text{ex}}(\underline{r}_i)$
 $= \underline{M}_i^{\text{ex}}(\underline{r}_i)$

Satz

Gesamtimpuls $\underline{P}$, Schwerpunkt $\underline{R}$ und Gesamtdrehimpuls genügen den Bewegungsgleichungen

$$\dot{\underline{P}} = \underline{F}^{\text{ex}}$$

$$M \ddot{\underline{R}} = \underline{F}^{\text{ex}}$$

$$\dot{\underline{L}} = \underline{M}^{\text{ex}}$$

entsprechend Bewegung eines MPs:

$$\dot{\underline{p}} = \underline{F}$$

$$m \ddot{\underline{r}} = \underline{F}$$

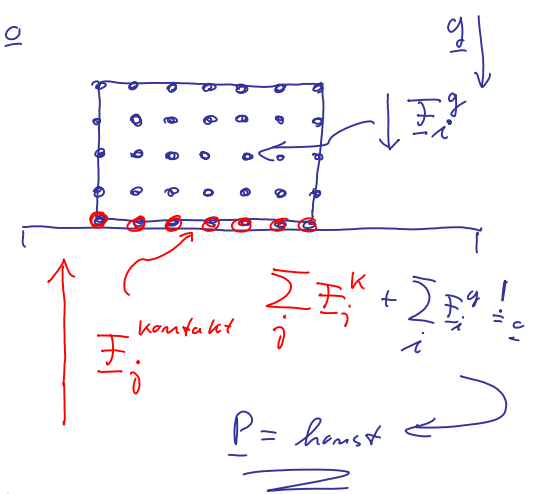
$$\dot{\underline{l}} = \underline{M}$$

(denn $\dot{\underline{P}} = \sum_i \dot{\underline{p}}_i = \sum_i \overbrace{\underline{F}_i^{\text{int}}}^{=0} + \sum_i \underline{F}_i^{\text{ex}} = \underline{F}^{\text{ex}}$, $M \ddot{\underline{R}} = \dot{\underline{P}}$
 und $\dot{\underline{L}} = \sum_i \dot{\underline{L}}_i = \sum_i \overbrace{\underline{M}_i^{\text{int}}}^{=0} + \sum_i \underline{M}_i^{\text{ex}} = \underline{M}^{\text{ex}}$)

insbesondere

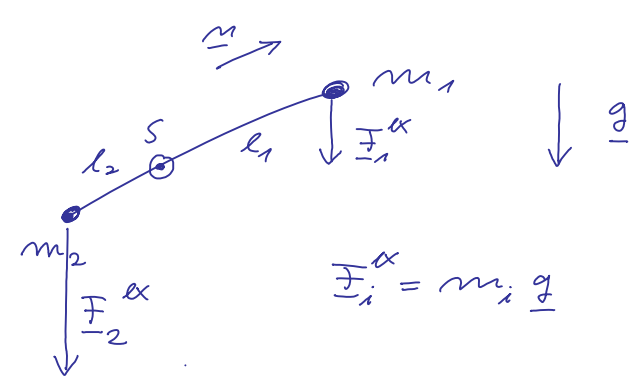
- $\underline{P}$ konstant g.d.w. $\sum_i \underline{F}_i^{\text{ex}} = \underline{0}$

z.B.:



- $\underline{L}$ konstant g.d.w. $\sum_i \underline{M}_i^{\text{ex}} = \underline{0}$

z.B.:



$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{M}_1^{\text{ex}} &= \underline{l}_1 \underline{m} \times m_1 \underline{g} = l_1 m_1 \underline{m} \times \underline{g} \\ \underline{M}_2^{\text{ex}} &= -l_2 \underline{m} \times m_2 \underline{g} = -l_2 m_2 \underline{m} \times \underline{g} = -\underline{M}_1^{\text{ex}} \end{aligned}$$

$\frac{l_2}{l_1} = \frac{m_1}{m_2}$

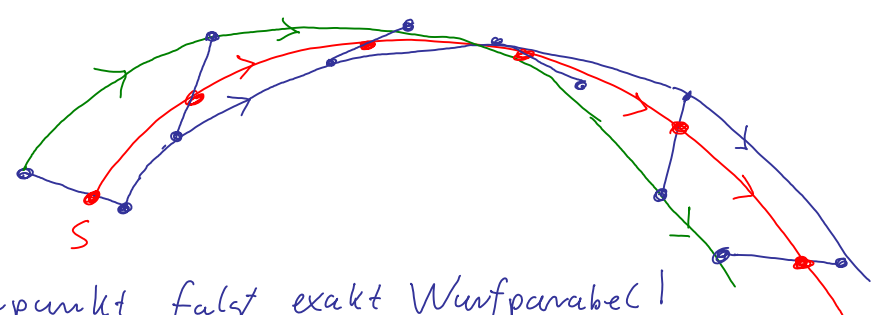
$\underline{M}^{\text{ex}} = \underline{0}$

$\underline{L}$ konstant

Zur Illustration von $\underline{M} \ddot{\underline{R}} = \underline{F}^{\text{ex}}$ betrachte zwei v.w.

$\underline{M}_{\text{Pe}}$ im Schwerfeld der Erde: $\underline{F}^{\text{ex}} = m_1 \underline{g} + m_2 \underline{g} = \underline{M} \underline{g}$,
 $\downarrow$
 m_1, m_2 konstant!

$\Rightarrow \ddot{\underline{R}} = \underline{g}$ und somit $\underline{R}(t) = \underline{R}_0 + \underline{v}_0 t + \frac{1}{2} \underline{g} t^2$



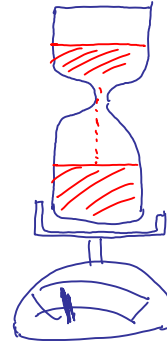
Schwerpunkt folgt exakt Wurfparabel!

Anwendung des Impuls- bzw Schwerpunktsatzes:

4/3

rieselnde Sanduhr auf Waage:

Was zeigt die Waage an?



System = Sand (+ Sanduhrgehäuse), Masse M , SP $\underline{R}$

→ externe Kräfte: Schwerkraft $\underline{F}_g = M \underline{g}$
(auf System) Kontaktkraft der Waage: $\underline{F}_k$ } $\underline{F}^{\text{ex}} = M \underline{g} + \underline{F}_k$

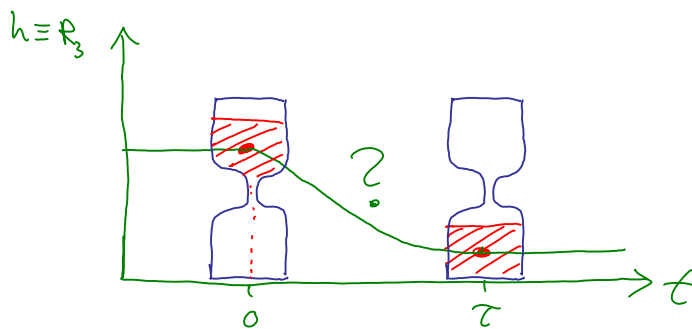
Waage misst $\underline{F}_W \equiv -\underline{F}_k$!

falls alles statisch: $\underline{R} = \text{konst} \rightarrow \underline{0} = M \underline{\ddot{R}} = M \underline{g} + \underline{F}_k$

d.h. $\underline{F}_W = M \underline{g}$ ✓

aber: Sand rieselt $\rightarrow \underline{R} = \underline{R}(t) \xrightarrow{!} \underline{\ddot{R}} \neq 0$

$\rightarrow \underline{F}_W \neq M \underline{g}$!



bestimme $\underline{\ddot{R}}(t)$
 $\rightarrow \underline{F}_W(t) \stackrel{!}{=} M \underline{g} - M \underline{\ddot{R}}(t)$

I $\uparrow b(1-t/\tau)$, $M_I = M(1-t/\tau)$, $R_I = d + \frac{b}{2}(1-t/\tau)$
II $\uparrow b t/\tau$, $M_{II} = M t/\tau$, $R_{II} = \frac{b}{2} t/\tau$

$\rightarrow R = \frac{1}{M} (M_I R_I + M_{II} R_{II}) = d(1-t/\tau) + \frac{b}{2}(1-t/\tau)^2 + \frac{b}{2}(t/\tau)^2$

$\rightarrow \underline{\ddot{R}} = b/\tau^2 + b/\tau^2 = 2b/\tau^2$

$\rightarrow \underline{F}_W = -M \underline{g} - M \frac{2b}{\tau^2} = -\left(1 + \frac{2b}{g\tau^2}\right) M \underline{g}$

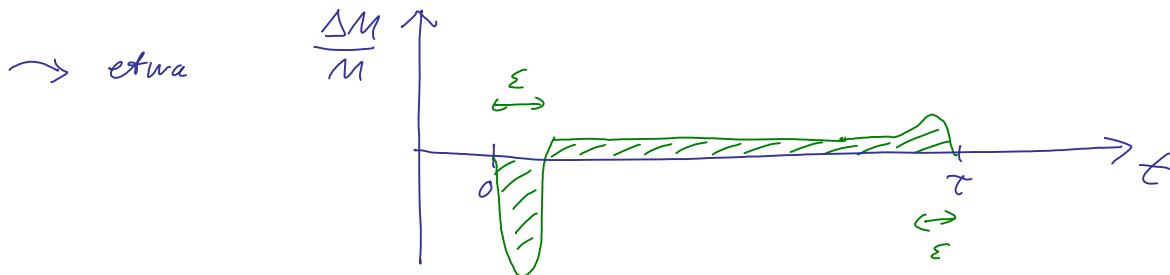
d.h. Waage zeigt während stationären Riesels erhöhtes

Gewicht an: $\frac{\Delta M}{M} = \frac{2b}{g\tau^2} \approx \frac{1}{2} 10^{-5}$

z.B. $b = 0.1 \text{ m}$, $\tau = 60 \text{ s}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ kein Problem für gute Waage

beachte: $\frac{1}{\tau} \int_{-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \Delta F dt = \frac{M}{\tau} \int_{-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \ddot{R} dt = \frac{M}{\tau} (\dot{R}(\tau+\varepsilon) - \dot{R}(-\varepsilon)) = 0$

zeitlich gemittelte Abweichung verschwindet!



Energiesatz der Newtonschen Mechanik:

konstante Kraft, Potenzial, potenzielle und kinetische Energie

zuerst: Dynamik eines MPs unter Wirkung einer (externen) Kraft $\underline{F}(\underline{r})$

↳ Abb. $\underline{r} \mapsto \underline{F}(\underline{r}) =:$ Kraftfeld

→ Bwgl.: $m \ddot{\underline{r}}(t) = \underline{F}(\underline{r}(t))$

z.B. 1) Schwerkraft (nahe Erdoberfl.): $\underline{F}(\underline{r}) = m \underline{g}$

2) lineare Zentralkraft: $\underline{F}(\underline{r}) = -k \underline{r}$

3) Schwerkraft eines MPs / Coulombkraft eines Plaf.

$$\underline{F}(\underline{r}) = - \frac{\alpha}{|\underline{r}|^2} \hat{\underline{r}} \quad ; \quad \alpha = G m M \quad /$$

$$\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q Q$$

Potenzial

U ist ein Potenzial des Kraftfelds $\underline{F}$ g.d. u.

$$\underline{F} = -\text{grad } U$$

Vektorfeld

$$V \rightarrow V \\ \underline{r} \mapsto \underline{F}(\underline{r})$$

Skalarfeld

$$V \rightarrow \mathbb{R} \\ \underline{r} \mapsto U(\underline{r})$$

Kraftfeld $\underline{F}$ konservativ g.d. u. $\underline{F}$ ein Potenzial besitzt

Kraftfelder unter 1), 2), 3) sind konservativ, da

$$m \underline{g} = -\text{grad} (-m \langle \underline{r}, \underline{g} \rangle) ,$$

$$-h \underline{r} = -\text{grad} \frac{h}{2} |\underline{r}|^2$$

$$-\frac{2}{|\underline{r}|^2} \hat{\underline{r}} = -\text{grad} \left(-\frac{2}{|\underline{r}|} \right)$$

Energiesatz (für MP im Kraftfeld)

Ein MP der Masse m bewege sich im konservativen Kraftfeld $\underline{F} = -\text{grad } U$ auf Bahn $\underline{r}(t)$.

$$\left[\text{d.h. } m \ddot{\underline{r}}(t) \stackrel{!}{=} \underline{F}(\underline{r}(t)) \right]$$

$$T(t) = \frac{1}{2} m |\dot{\underline{r}}(t)|^2 \quad \text{und} \quad V(t) = U(\underline{r}(t))$$

seien kinetische und potenzielle Energie des MP.

Dann gilt: Die Gesamtenergie $E(t) = T(t) + V(t)$ ist konstant.

$$\langle \text{grad } U(\underline{r}(t)), \dot{\underline{r}}(t) \rangle$$

$$\begin{aligned} \left[\text{denn } \dot{E}(t) &= m \langle \dot{\underline{r}}(t), \ddot{\underline{r}}(t) \rangle + \frac{d}{dt} U(\underline{r}(t)) \right. \\ &= \langle \dot{\underline{r}}(t), \underbrace{m \ddot{\underline{r}}(t)}_{\parallel \underline{F}(\underline{r}(t))} + \underbrace{\text{grad } U(\underline{r}(t))}_{\parallel -\underline{F}(\underline{r}(t))} \rangle = 0 \left. \right] \end{aligned}$$