allg. <u>isotrope Zentralkraft</u> $\underline{F}(\underline{r}) = f(r)\,\hat{\underline{r}}$

besitzt Potenzial $U(r) = -\int_{r_0}^{r} f(r')\,dr'$ und damit konservativ

$\Big\lceil$ denn $-\operatorname{grad} U(r) = -U'(r)\,\hat{\underline{r}} = f(r)\,\hat{\underline{r}} = \underline{F}(\underline{r})$ $\Big\rfloor$

<u>Satz</u> (vgl. Math. Meth., Math. f. Physiker I/II)

$\underline{F}$ sei auf einfach-zusammenhängendem Gebiet definiert,

dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\underline{F}$ konservativ

(ii) $\operatorname{rot} \underline{F} = 0$

(iii) für alle geschlossenen Wege c $\quad \oint_c \underline{F}\,d\underline{s} = 0$

<u>Eindimensionale Bewegung</u> eines MPs:

$$\underline{r}(t) = x(t)\,\underline{e}_1\,, \qquad \underline{F}(\underline{r}) = F(x)\,\underline{e}_1\,,$$
$$\underline{p}(t) = p(t)\,\underline{e}_1 = m\,\dot{x}(t)\,\underline{e}_1\,,$$

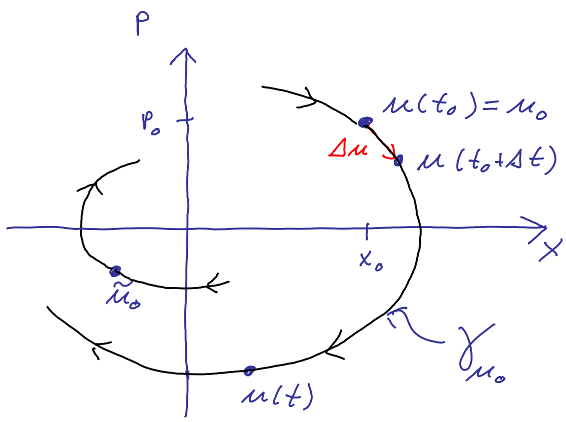
<u>Zustand (Phase)</u> des MP zur Zeit t_0:

$$(x(t_0),\ p(t_0)) =: u(t_0) \in \Gamma \equiv \mathbb{R}^2$$
$$\uparrow$$

Zustands- oder <u>Phasenraum</u> des MPs.

per Integration von $\underline{\dot{x} = p/m\,, \quad \dot{p} = F(x)}$ folgt aus Anfangs-zustand $u(t_0)$ Zustand $u(t)$ für bel. Zeit t:

<u>graphisch</u>:



Γ

$\Delta u = \left(\frac{p_0}{m}\,,\ F(x_0)\right)\Delta t$

In $D=1$ <u>Phasenraumkurve</u> $\gamma_{u_0} = \{\, u(t) \mid t \in \mathbb{R}\,,\ u(t_0) = u_0 \,\}$ durch

<u>Energieerhaltung</u> bestimmt:

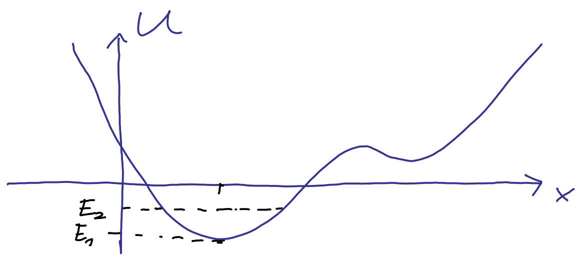
$U(x)$ sei Potenzial der Kraft $F(x)$, d.h. $F(x) = -U'(x)$,

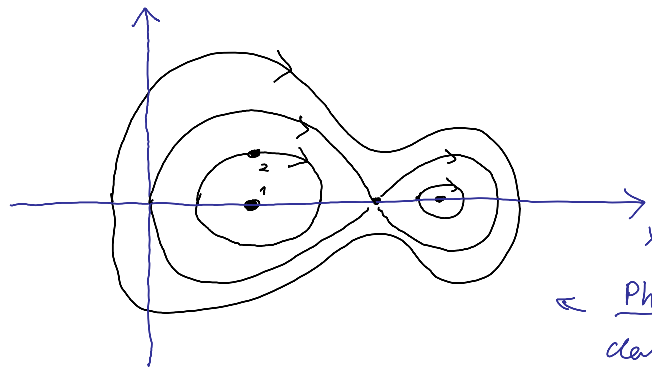
dann ist γ_{u_0} die (u_0 enthaltende Zhgs-Komp.) der Kurve

$$\boxed{\frac{p^2}{2m} + U(x) = E_0}$$

$\hookrightarrow E_0 = p_0^2/2m + U(x_0)$

etwa:





← Phasenraumporträt der Dynamik in $U(x)$

Bestimmung der Bahnen $x(t)$

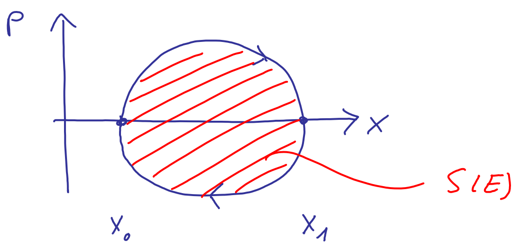
Energieerhaltung: $\quad p(t) = \pm\sqrt{2m}\sqrt{E - U(x(t))}$

d.h. $\quad \dot{x}(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - U(x(t))}$; DGL 1. Ord., Vorzeichen bestimmt durch $\dot{x}(t_0) = p_0/m$

→ $x(t)$ durch "Trennung der Variablen":

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \quad . \qquad (*)$$

betrachte geschlossene Phasenraumbahn mit Umkehrpkte x_0, x_1, Energie E $(= U(x_0) = U(x_1))$



Periode T der Schwingung zwischen x_0, x_1 gegeben durch

$$\frac{T}{2} = t_1 - t_0 \underset{(*)}{=} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{E-U(x)}}\, dx = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{E-U(x)}}\, dx ,$$

d.h. $$T = \frac{d}{dE} \underbrace{2 \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{2m} \sqrt{E-U(x)}\, dx}_{\overset{!}{=} S(E)}$$

<u>Def</u>: <u>Wirkung</u> einer <u>geschl. Phasenraumkurve γ</u> bei Energie E:

$$S(E) := 2 \int_{x_0}^{x_1} p(x)\, dx$$

$$= 2 \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{2m} \sqrt{E-U(x)}\, dx \equiv \text{umschlossene Phasenraumfläche}$$

$\longrightarrow$ <u>schöne Formel</u>:

$$\boxed{T = \frac{dS(E)}{dE}}$$