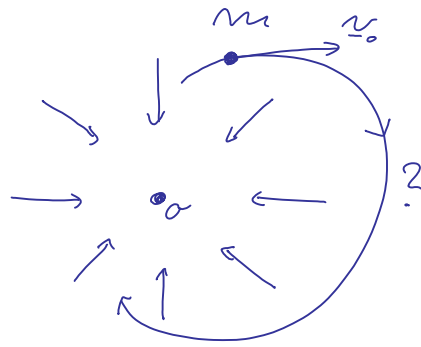


Massenpunkt im isotropen Zentralkraftfeld



$$\underline{F}(\underline{r}) = f(r) \hat{r}$$

$$= -\text{grad } U(|\underline{r}|)$$

Energieerhaltung ✓

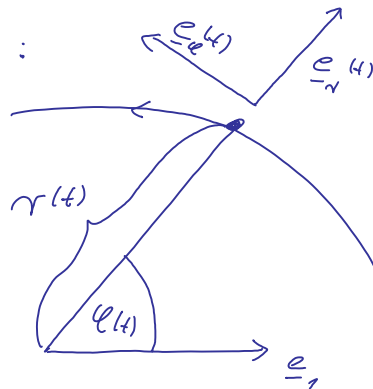
Drehimpulserhaltung: wg $\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F} = \underline{0}$ ist

$$\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p} \quad \text{konstant:} \quad \underline{L} \equiv \underline{L}(t_0) \stackrel{!}{=} \underline{r}(t) \times \underline{p}(t)$$

→ zu allen Zeiten t : $\langle \underline{r}(t), \underline{L} \rangle = 0$

d.h. Bahn $\underline{r}(t)$ verläuft in der Ebene $E \perp \underline{L}$ durch σ .

→ beschreibe Bahn $\underline{r}(t)$ in Ebene E mittels Polarkoordinaten $(r(t), \varphi(t))$:



$$\underline{r}(t) = r(t) \underline{e}_r(t)$$

$$\rightarrow \dot{\underline{r}} = \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi$$

$$\rightarrow \underline{L} = \underline{r} \times m \dot{\underline{r}} = r^2 m \dot{\varphi} \underline{e}_r \times \underline{e}_\varphi = r^2 m \dot{\varphi} \underline{e}_z$$

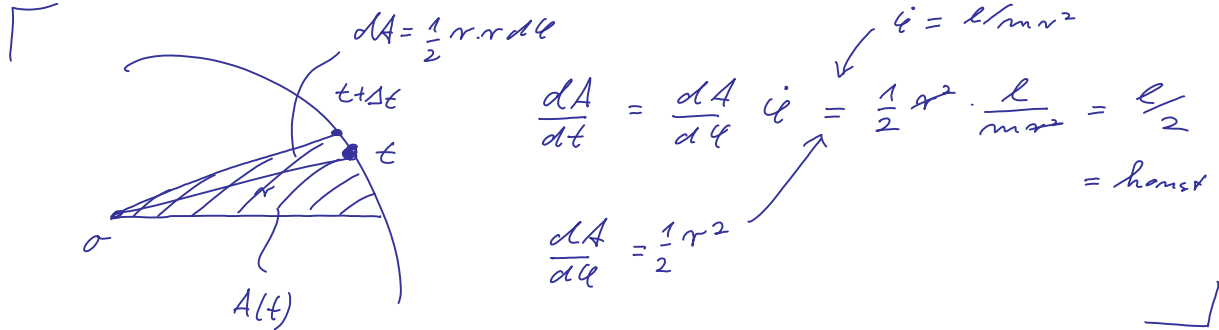
$$\text{insbesondere } l \equiv |\underline{L}| = r^2 m \dot{\varphi}$$

→ Azimuthalgleichung:

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{m r^2}$$

→ Flächensatz (Kepler):

„Fahrstrahl des MP überstricht in gleichen Zeiten gleiche Flächen“:



mit $|\dot{\mathbf{r}}|^2 = |\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$

$$= \dot{r}^2 + \frac{l^2}{m^2 r^2}$$

$\uparrow$
 $\dot{\varphi} = l/mr^2$

erhalten wir Energie

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{l^2}{2mr^2}}_{=: U_{\text{eff}}(r)} + U(r)$$

d.h. Radius $r(t)$ des MP im Z.P. $U(r)$ verhält sich wie 1D-MP im effektiven Potenzial

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + U(r)$$

$\uparrow$
„Drehimpulsbarriere“

→ qualitative u. quantitative Diskussion von $r(t)$ wie oben

Phasenraumporträt
für MP im U_{eff}

$$\dot{r}(t) = \pm \left(\frac{2}{m} (E - U_{\text{eff}}(r(t))) \right)^{1/2} \quad (*)$$

↓ T.d.V.

$$\begin{cases} t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}} \rightarrow r(t) \quad \checkmark \\ \dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2} \rightarrow \varphi(t) - \varphi(0) = \int_0^t \frac{l}{m r(t)^2} dt \quad \checkmark \end{cases}$$

$\rightarrow (r(t), \varphi(t)) \quad \square$

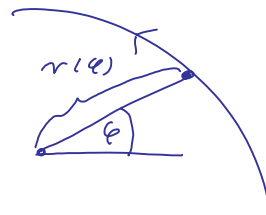
Bestimmung der Bahnkurve $r(\varphi)$:

mittels $\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{l}{mr^2}$ wird DGL (*) zu

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\sqrt{2m}}{l} r^2 \sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)} \quad (r = r(\varphi))$$

T.d.V

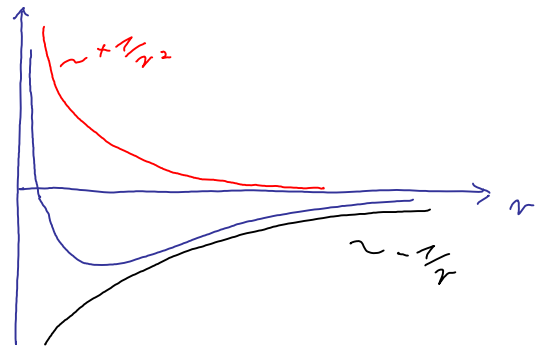
$$\varphi - \varphi_0 = \frac{l}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^{r(\varphi)} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}} \quad (*)$$



Beispiel: MP im Kraftfeld $\vec{F}(\underline{r}) = -\frac{\alpha}{|\underline{r}|^2} \hat{r}$
(etwa Komet im Schwerfeld der Sonne)

$$\alpha = G M_\odot m_K$$

$$U_{\text{eff}} = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$$



$$\Rightarrow E > 0 : \quad 0 < r_{\min} \leq r(t)$$

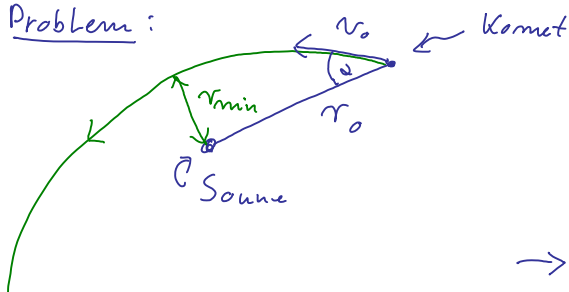
↑
solange $l > 0$

$$E < 0 : \quad 0 < r_{\min} \leq r(t) \leq r_{\max}$$

$$E = \min_r U_{\text{eff}}(r) : \quad r(t) = r_0, \text{ stabile Kreisbahn}$$

genauer über $r(\varphi)$ durch Bestimmung des Integrals (*)
(vgl. Üb. 9.)

Problem:



$$r_0, v_0, \alpha \rightarrow r_{\min} = ?$$

$$\rightarrow E = \frac{m}{2} v_0^2 - \frac{G M m}{r_0}$$

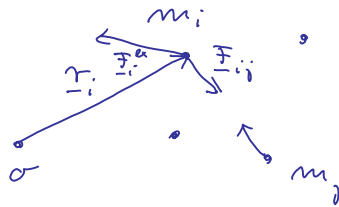
$$\rightarrow l = m r_0 v_0 \sin \alpha$$

$$\rightarrow E = U_{\text{eff}}(r_{\min}) = \frac{l^2}{2m r_{\min}^2} - \frac{GmM}{r_{\min}}$$

$$\rightarrow r_{\min}$$

Energiesatz für Newtonsches N-Teilchensystem mit

konservativen Wechselwirkungen:



externe Kräfte: $\underline{F}_i^{\text{ex}}(\underline{r}_i) = -\text{grad } U_i(\underline{r}_i)$

interne Kräfte: $\underline{F}_{ij}(\underline{r}_i, \underline{r}_j) = -U'_{ij}(\underline{r}_{ij}) \hat{\underline{r}}_{ij}$

wobei $\underline{r}_{ij} := \underline{r}_i - \underline{r}_j \equiv r_{ij} \hat{\underline{r}}_{ij}$; $\boxed{U_{ij}(r) = U_{ji}(r)}$

etwa $U_{ij}(r) = -G \frac{m_i m_j}{r} \rightarrow \underline{F}_{ij}(\underline{r}_{ij}) = -G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \hat{\underline{r}}_{ij}$

Bahnen $\underline{r}_i(t)$ erfüllen $m \ddot{\underline{r}}_i(t) = \underline{F}_i(\underline{r}_1(t), \dots, \underline{r}_N(t))$

(mit $\underline{F}_i = \sum_{j \neq i} \underline{F}_{ij} + \underline{F}_i^{\text{ex}}$)

kinetische Energie: $T(t) = \sum_i \frac{m_i}{2} |\dot{\underline{r}}_i(t)|^2$

potenzielle Energie: $V(t) = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{ij}(|\underline{r}_i(t) - \underline{r}_j(t)|)}_{\text{Wechselwirkungsenergie}} + \underbrace{\sum_i U_i(\underline{r}_i(t))}_{\text{externe potenzielle Energie}}$

Energieerhaltungssatz

Die Gesamtenergie $E = T(t) + V(t)$ eines Systems mit konservativen Kräften ist konstant.

Beweis: $\frac{dT}{dt} = \sum_i m_i \langle \ddot{\underline{r}}_i, \dot{\underline{r}}_i \rangle$

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \sum_i \langle \text{grad } U_i(\underline{r}_i), \dot{\underline{r}}_i \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{d}{dt} U_{ij}(|\underline{r}_i - \underline{r}_j|) \\
&= \sum_i - \langle \underline{F}_i^{\text{ex}}(\underline{r}_i), \dot{\underline{r}}_i \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \underbrace{U'_{ij}(\underline{r}_{ij}) (\dot{\underline{r}}_i - \dot{\underline{r}}_j)}_{\substack{= \\ \langle -\underline{F}_{ij}, \dot{\underline{r}}_i \rangle + \langle \underline{F}_{ij}, \dot{\underline{r}}_j \rangle \\ = \langle -\underline{F}_{ji}, \dot{\underline{r}}_i \rangle \\ = \sum_{i \neq j} \langle -\underline{F}_{ij}, \dot{\underline{r}}_i \rangle}} \\
&= \sum_i \langle \underbrace{-\underline{F}_i^{\text{ex}} - \sum_{j \neq i} \underline{F}_{ij}}_{= -m \ddot{\underline{r}}_i}, \dot{\underline{r}}_i \rangle = - \frac{dT}{dt} \\
&\quad \quad \quad \rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \quad \square
\end{aligned}$$

Verallgemeinerung:

neben obigen Konservativen internen u. externen Kräfte
wirke beliebige weitere Kraft $\tilde{\underline{F}}_i$ auf i-tem MP

z.B. $\tilde{\underline{F}}_i = \tilde{\underline{F}}_i(\underline{r}_i, \dot{\underline{r}}_i, t)$, oder sogar $\tilde{\underline{F}}_i = \sum_{j \neq i} \tilde{\underline{F}}_{ij}(\underline{r}_i, \underline{r}_j, \dot{\underline{r}}_i, \dot{\underline{r}}_j)$
etc. |

dann gilt:

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = + \sum_i \langle \tilde{\underline{F}}_i, \dot{\underline{r}}_i \rangle =: P}$$

Leistung der Kräfte $\tilde{\underline{F}}_i$
am System

$$\left[\frac{dE}{dt} = \sum_i \langle \underbrace{m_i \ddot{\underline{r}}_i}_{\substack{= \\ \underline{F}_i^{\text{ex}} + \underline{F}_i^{\text{int}} + \tilde{\underline{F}}_i}} - \underline{F}_i^{\text{ex}} - \underline{F}_i^{\text{int}}, \dot{\underline{r}}_i \rangle = P \quad \checkmark \right]$$

Integration $\int_{t_1}^{t_2} dt \dots$ liefert

$$\Delta E = E(t_2) - E(t_1) = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \langle \tilde{\underline{F}}_i(t), \dot{\underline{r}}_i(t) \rangle dt$$

Weg $\underline{r}_i: [t_1, t_2] \rightarrow V$
 $t \mapsto \underline{r}_i(t)$

$$\int_{c_i} \tilde{\underline{F}}_i d\underline{s} =: W_i$$

W_i ist die von $\tilde{\underline{F}}_i$ am System verrichtete Arbeit ;

d.h.
$$\Delta E = \sum_i \tilde{W}_i$$

Vorsicht: oft betrachtet man anstatt $\tilde{\underline{F}}_i$ die entsprechende Gegenkraft $\hat{\underline{F}}_i = -\tilde{\underline{F}}_i$, dann

$$W_i = - \int_{C_i} \hat{\underline{F}}_i \cdot d\underline{s} \quad .$$