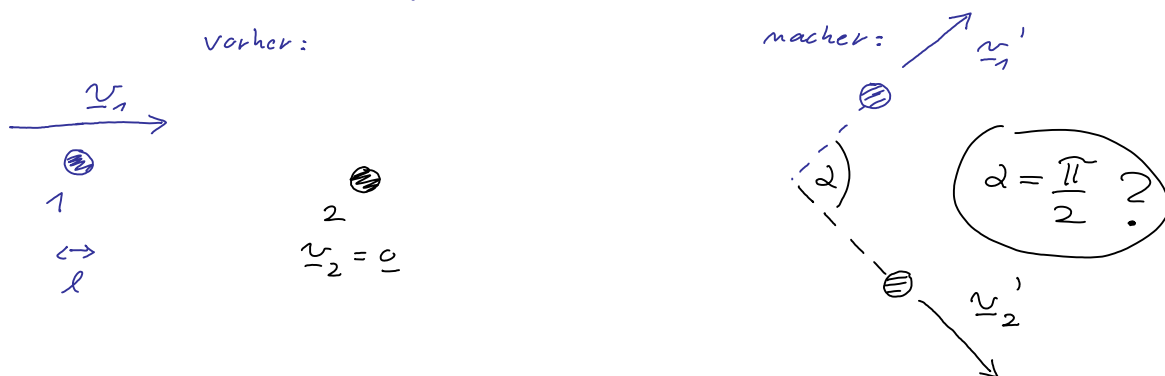


Anwendung des Energiesatzes am Beispiel des Stoßes zweier MPc gleicher Masse

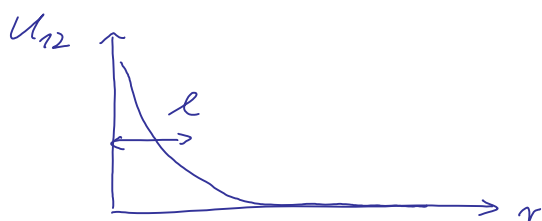


Wechselwirkungspotenzial $U_{12}(r)$ sei

kurzreichweitig, etwa

$$U_{12}(r) = u(r) e^{-r/l}$$

z.B. $\sim 1/r$



l : Reichweite

$\rightarrow$ für $r \gg l$ $U_{12}(r)$ praktisch verschwindend

$\rightarrow$ Stoß bei $t=0$ während $-\tau < t < \tau$,

Impulse für $t < -\tau$: $P_1, P_2 = 0$

für $t' > \tau$: P_1', P_2'

Impulserhaltung: $P_1 = P_1' + P_2' \quad (1)$

Energieerhaltung: $E(t) = T(t) + V(t) \stackrel{!}{=} T(t') + V(t')$

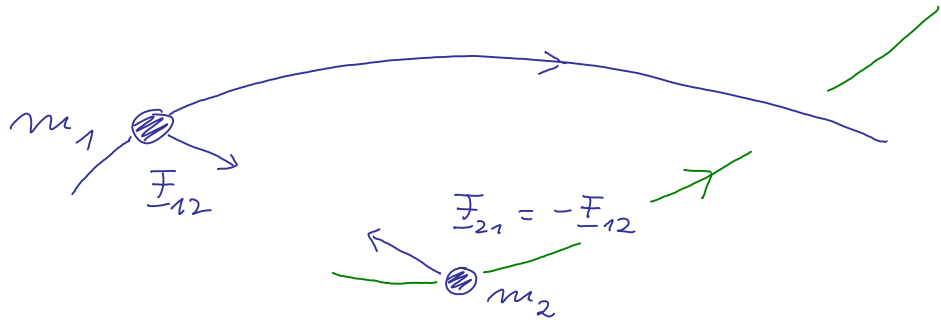
$$\text{d.h.} \quad \frac{P_1^2}{2m} = \frac{P_1'^2}{2m} + \frac{P_2'^2}{2m} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (1) \rightarrow P_1^2 &= |P_1' + P_2'|^2 = P_1'^2 + P_2'^2 + 2\langle P_1', P_2' \rangle \\ (2) \rightarrow P_1^2 &= P_1'^2 + P_2'^2 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (1) \rightarrow P_1^2 &= |P_1' + P_2'|^2 = P_1'^2 + P_2'^2 + 2\langle P_1', P_2' \rangle \\ (2) \rightarrow P_1^2 &= P_1'^2 + P_2'^2 \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} & \\ & \leftarrow 0 \stackrel{!}{=} \langle P_1', P_2' \rangle \end{aligned}$$

also tatsächlich $\alpha = \pi/2$.

Zweikörperproblem

(mit isotroper Zentral-Wechselwirkungskraft)



$$\underline{F}_{12}(\underline{r}_1, \underline{r}_2) = \underline{F}(\underline{r}_{12}) = -\underline{F}_{21}(\underline{r}_{21}) \parallel \underline{r}_{12},$$

$$\underline{r}_{12} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2; \quad \underline{F}(\underline{r}) = -\text{grad } U(|\underline{r}|)$$

Zustand beschrieben durch 2×3 Koordinaten $\underline{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}; \underline{r}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$
+ 2×3 Impulskomponenten $\underline{p}_1 = \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ h_1 \end{pmatrix}, \underline{p}_2 = \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \\ h_2 \end{pmatrix}$

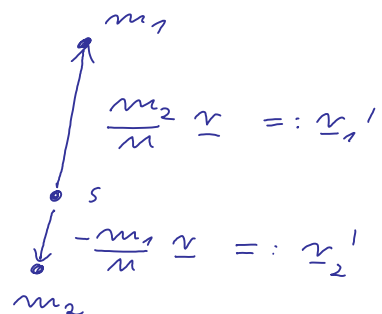
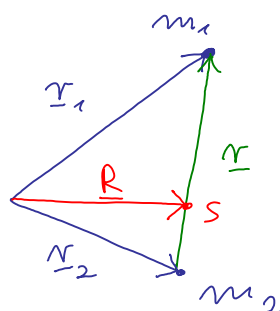
$\hat{=}$ 12 unabhängigen Parametern

Reduktion auf nur 2 Parameter durch Ausnutzung der
Erhaltung von Gesamtimpuls, Schwerpunkt, Gesamtdrehimpuls,
und Energie $\hat{=}$ $3 + 3 + 3 + 1 = 10$ Bedingungsgleichungen
an Phasenraumbahn $\underline{u}(t) = (\underline{r}_1(t), \underline{r}_2(t), \underline{p}_1(t), \underline{p}_2(t)) \in \mathbb{R}^{12}$
 $\rightarrow \underline{u}(t) \in 12 - 10 = 2$ dim Umfgh. des $\mathbb{R}^{12}$.

sehr hilfreich ist Transf. auf Schwerpunkts- und Relativkoordinaten

$$\underline{r}_1, \underline{r}_2 \longrightarrow \begin{cases} \underline{R} = \frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{M}, M = m_1 + m_2 \\ \underline{r} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2, \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{r}_1 &= \underline{R} + \frac{m_2}{M} \underline{r} \\ \underline{r}_2 &= \underline{R} - \frac{m_1}{M} \underline{r} \end{aligned} \right\} \longleftarrow \underline{R}, \underline{r}$$



(a) Erhaltung des Gesamtimpulses $\underline{P} = m_1 \dot{\underline{r}}_1 + m_2 \dot{\underline{r}}_2$ impliziert
geradlinig-gleichförmige Bwg. des Schwerpunkts :

$$\underline{R}(t) = \underline{R}(0) + \frac{\underline{P}}{m} t$$

(b) Erhaltung des Drehimpulses bzgl. $\underline{R}$:

$$\underline{L}' = m_1 \underline{r}_1' \times \dot{\underline{r}}_1' + m_2 \underline{r}_2' \times \dot{\underline{r}}_2'$$

$$\text{mit } \underline{r}_1' = \underline{r}_1 - \underline{R} = \frac{m_2}{m} \underline{r} \rightarrow \dot{\underline{r}}_1' = \frac{m_2}{m} \dot{\underline{r}}$$

$$\underline{r}_2' = \underline{r}_2 - \underline{R} = -\frac{m_1}{m} \underline{r} \rightarrow \dot{\underline{r}}_2' = -\frac{m_1}{m} \dot{\underline{r}}$$

$$\text{erhalten wir } \underline{L}' = \frac{1}{m^2} (m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2) \underline{r} \times \dot{\underline{r}}$$

$$= \frac{m_1 m_2}{m} \underline{r} \times \dot{\underline{r}}$$

mit reduzierter Masse $\mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ also

$$\underline{L}' = \mu \underline{r} \times \dot{\underline{r}} = \text{konst.}$$

→ • Relativvektor $\underline{r}(t)$ bewegt sich in Ebene $\perp \underline{L}'$ durch $\sigma' \equiv 5$

• $\underline{L}'$ = Drehimpuls eines effektiven Teilchens mit
 Masse μ und Ort $\underline{r}(t)$

(c) Bewgsgl. des Relativvektors $\underline{r}(t)$:

$$\ddot{\underline{r}} = \ddot{\underline{r}}_1 - \ddot{\underline{r}}_2 = \frac{1}{m_1} \underline{F}_{12}(\underline{r}_{12}) - \frac{1}{m_2} \underline{F}_{21}(\underline{r}_{21})$$

$$= \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \underline{F}(\underline{r}_{12}) = \frac{1}{\mu} \underline{F}(\underline{r}_{12})$$

$$\underline{F}_{21}(\underline{r}_{21}) = -\underline{F}_{12}(\underline{r}_{12}) \equiv \underline{F}(\underline{r})$$

d.h. $\underline{r}(t)$ genügt

$$\boxed{\mu \ddot{\underline{r}}(t) = \underline{F}(\underline{r}(t))}$$

Bwgl. eines MP der reduzierten Masse μ
 im Kraftfeld $\underline{F}(\underline{r})$;

mit Drehimpuls $\underline{L} = \mu \underline{r} \times \dot{\underline{r}} \stackrel{!}{=} \underline{L}'$ (s.o.)

Energie

$$E_r = \frac{\mu}{2} |\dot{\underline{r}}|^2 + U(|\underline{r}|) \neq E' = \sum_i \frac{m_i}{2} |\dot{\underline{r}}_i'|^2 + \underbrace{U(\underline{r}_i')}$$

mit $\vec{F}(r) = -U'(r) \hat{r}$ führt Bzgl. oben gezeigt auf

Asymmetrie gl: $\dot{\varphi} = l/\mu r^2$

Energie gl: $E_r = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r)$

Damit Zwei-Körperproblem (12 Parameter) auf

Problem eines MP in $d=1$ im effektiven

Potenzial $U_{\text{eff}}(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r)$ reduziert (2 Param.).

Beispiel: Systeme Planet - Sonne, Mond-Erde, Stern₁ Stern₂