

Symmetrien der Newtonschen Mechanik: allgemeine
Galilei-Transformationen, allg. Koordinatensysteme,
Trägheitskräfte

bedr. abgeschlossenes N -Teilchen-System mit isolierten
 $2k$ -WW

$$\text{d.h. } \left. \begin{aligned} \vec{F}_i &= \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}, & \vec{F}_{ij}(\underline{x}_{ij}) &\parallel \underline{x}_{ij}, \\ & & |\vec{F}_{ij}(\underline{x}_{ij})| &= f_{ij}(|\underline{x}_{ij}|) \end{aligned} \right\}$$

Bahnen $\underline{x}_i(t)$ genügen Buglen: d.h. $\vec{F}_{ij}(\underline{x}) = f_{ij}(|\underline{x}|) \hat{x}$

$$m \ddot{\underline{x}}_i(t) = \vec{F}_i(\underline{x}_1(t), \dots, \underline{x}_N(t)) \quad (1)$$

Unter Symmetrietransformationen der N.M.

verstehen wir Abb. $S: \begin{pmatrix} \underline{x} \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \underline{x}' \\ t' \end{pmatrix} = S(\underline{x}, t)$

derart, dass mit $\{\underline{x}_i(t)\}_{i=1, \dots, N}$ auch $\{\underline{x}'_i(t')\}_{i=1, \dots, N}$

folgender Bugl. (1) sind.

Folgende Abb. sind Symmetrietransf.:

1) Translation um $\underline{d}$:

$$\underline{T}_{\underline{d}}: \begin{pmatrix} \underline{x} \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \underline{x} + \underline{d} \\ t \end{pmatrix}$$

2) Drehung, Spiegelung mit $R \in O(3)$

$$D_R: \begin{pmatrix} \underline{x} \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} R \underline{x} \\ t \end{pmatrix}$$

$\left[R: V \rightarrow V \text{ orthogonal g.d.w. } \forall v \in V: |v| = |Rv| \right]$
 $\Rightarrow R^+ R = \mathbb{1}$

3) (spezielle) Galilei-Transformation mit Geschw. $\underline{v}$: (2)

$$G_{\underline{v}}: \begin{pmatrix} \underline{x} \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \underline{x} + \underline{v}t \\ t \end{pmatrix}$$

4) Zeittranslation um $s \in \mathbb{R}$

$$T_s: \begin{pmatrix} \underline{x} \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \underline{x} \\ t + s \end{pmatrix}$$

5) Zeitumkehr:

$$U: \begin{pmatrix} \underline{x} \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \underline{x} \\ -t \end{pmatrix}$$

zu 1): $\underline{x}_i(t)$ seien Lsg. der Bzgl. (1);

z.z.: $\underline{x}'_i(t) := \underline{x}_i(t) + \underline{d}$ erfüllen ebenfalls (1) !

$$m_i \ddot{\underline{x}}'_i(t) = m_i \frac{d^2}{dt^2} (\underline{x}_i(t) + \underline{d}) = m_i \ddot{\underline{x}}_i(t)$$

$$\stackrel{\text{n.v.}}{=} \underline{F}_i(\underline{x}_1(t), \dots, \underline{x}_n(t)) = \sum_j \underline{F}_{ij}(\underbrace{\underline{x}_i(t) - \underline{x}_j(t)}_{\substack{= \\ \underline{x}'_i(t) - \underline{x}'_j(t)}})$$

$$= \underline{F}_i(\underline{x}'_1(t), \dots, \underline{x}'_n(t)) \quad \checkmark$$

zu 2): z.z.: $\underline{x}'_i(t) := R \underline{x}_i(t)$ Lsg. von (1):

$$m \ddot{\underline{x}}'_i(t) = m R \ddot{\underline{x}}_i(t) = R (m \ddot{\underline{x}}_i(t)) \stackrel{\text{n.v.}}{=} R \underline{F}_i(\underline{x}_1(t), \dots, \underline{x}_n(t))$$

$$= \sum_j R \underline{F}_{ij}(\underline{x}_{ij}(t)) = \sum_j f_{ij}(\underbrace{|\underline{x}_{ij}(t)|}_{= |\underline{x}'_{ij}(t)|}) \underbrace{R \hat{\underline{x}}_{ij}}_{\substack{= \\ \hat{\underline{x}}'_{ij}}}$$

$$= \sum_j f_{ij}(|\underline{x}'_{ij}(t)|) \hat{\underline{x}}'_{ij} = \sum_j \underline{F}_{ij}(\underline{x}'_{ij}(t)) = \underline{F}_i(\underline{x}'_1(t), \dots, \underline{x}'_n(t)) \quad \checkmark$$

zu 3) $\underline{x}'_i(t) = \underline{x}_i(t) + \underline{v}t$

(3)

$\rightarrow \ddot{\underline{x}}'_i(t) = \ddot{\underline{x}}_i(t)$, dann wie unter 1) ✓

zu 4 und 5)

$\underline{x}'_i(t) = \underline{x}_i(t+s)$

$\rightarrow \ddot{\underline{x}}'_i(t) = \ddot{\underline{x}}_i(t+s)$, Rest trivial ✓

Obige Symmetrietransf. können beliebig zu neuen Symmetrietransf. kombiniert werden

$\rightarrow$ allgemeine Galilei-Transformation:

$$G_{\underline{d}, \underline{v}, R, s, \lambda} : \begin{pmatrix} \underline{x} \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \underline{d} + \underline{v}t + R\underline{x} \\ \lambda t + s \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\quad}_{\{ \pm 1 \}}$

Sie ist die allgemeinste Symmetrietransf.

① Symm. Transf.: $G_{\underline{d}, \underline{v}, R, s, \lambda} \stackrel{!}{=} T_{\underline{d}} G_{\underline{v}} D_R \tau_s U_{\lambda}$ ✓

② allgemein: Sei $\begin{pmatrix} \underline{x} \\ t \end{pmatrix} \xrightarrow{S} \begin{pmatrix} \underline{x}' \\ t' \end{pmatrix}$ s.d. mit $\underline{x}(t)$ auch $\underline{x}'(t')$ B. u.!

a) freie Teilchen bewegen sich geradlinig-gleichförmig

$\rightarrow \frac{d\underline{x}'}{dt'} = \text{konst} = \underline{v}$

$\rightarrow \underline{x}' = A\underline{x}$, A affin: $A\underline{x} \stackrel{!}{=} L\underline{x} + \underline{u}(t)$

b) betrachte etwa $N=2$, $\ddot{\underline{x}}_{i,0}(t) = h\underline{v}$

$\rightarrow \ddot{\underline{x}}' = \ddot{\underline{x}} \xrightarrow{!} 1 = \frac{d^2 t'}{dt^2} = \lambda^2 \rightarrow \lambda = \pm 1$

$\underline{\dot{x}} = \underline{v}t$

a, b) $\rightarrow t' = \lambda t + s$ und $\underline{u}(t) = \underline{0}$

$\underline{u}(t) = \underline{d} + \underline{v}t$

c) Betrachte $N=2$, $m_1=m_2$, $\underline{x}(t) = \underline{x}_1 - \underline{x}_2$ (4)

Kreisbahn, $\underline{F}_{12}(t) = -k\underline{x}$, Potential $U(t) = 0$

für bel. $\underline{x}_0$ ex. $\underline{x}(t)$ mit $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$

$$\rightarrow |\dot{\underline{x}}| = |\underline{x}| \quad \text{d.h.} \quad |L\underline{x}| = |\underline{x}|$$

also L orthogonal

$$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rightarrow S = G_{\underline{d}, \underline{v}, R, s, \lambda} !$$

Die Menge aller Symmetrietransformationen
ist also genau

$$\mathcal{G} = \left\{ G_{\underline{d}, \underline{v}, R, s, \lambda} \right\}$$

$\underline{d}, \underline{v} \in V$
 $R \in O(3)$
 $s \in \mathbb{R}$
 $\lambda \in \{\pm 1\}$

die Menge der allg. Galileitransformationen,

bzgl. Komposition: $g_1, g_2 \mapsto g_1 \circ g_2$ bildet

sie eine Gruppe, was aus physikalischen Sicht

klar ist und formal leicht gezeigt werden

kann (vgl. Üfg.).

kontinuierlicher Parameter: $\underline{d} \rightarrow 3$

$\underline{v} \rightarrow 3$

3 Euler-Winkel $\hat{=} \underline{v}, \underline{v} \hat{=} \mathbb{R} \rightarrow 3$

$s \rightarrow 1$

10

10

(5)

diskreter Parameter: $\lambda \rightarrow 1$

$$\pm 1 = \det R \rightarrow \underline{1}$$

$$\underline{2}$$

Die Übereinstimmung der diskret. hamt. Parameter der Symmetriegruppe und der diskret. Erhaltungsgrößen im $\underline{P}$, $\underline{R}(\omega) = \underline{R}(\hbar) - \frac{\underline{P}}{m} t$, $\underline{L}$ und $\underline{E}$ findet Erklärung im Salz von Noether über den allg. Zusammenhang von Symmetrien und Erhaltungsgrößen.

genau:

Symmetrie

Erhaltungsgröße

$\underline{T}_d$

$\underline{P}$

$\underline{D}_R$

$\underline{L}$

$\underline{G}_N$

$\underline{R}(\omega)$

$\underline{T}_S$

$\underline{E}$

