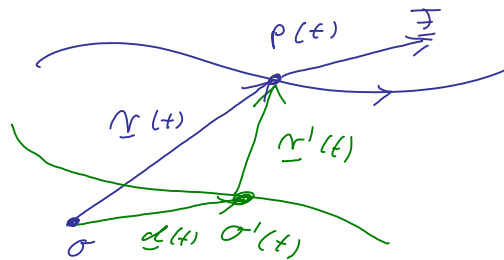


# Beschleunigte Koordinatensysteme und Trägheitskräfte

9/1

(  $\uparrow \equiv$  Scheinkräfte )

- Ortsvektor  $\underline{r}(t) = \overrightarrow{\sigma P(t)}$  eines MPs bzgl. inertialen Punkts  $\sigma$  genügt N.II:  $m \ddot{\underline{r}}(t) = \underline{F}(t)$ ;



- Ortsvektor  $\underline{r}'(t) = \overrightarrow{\sigma'(t) P(t)}$  bzgl. nicht-inertialen  $\sigma'(t) = \sigma + \underline{d}(t)$  verletzt dann N.II:

d.h.  $m \ddot{\underline{r}}'(t) \neq \underline{F}(t)$

aber:  $m \ddot{\underline{r}}'(t) = m \frac{d^2}{dt^2} (\underline{r}(t) - \underline{d}(t))$

$$= \underbrace{m \ddot{\underline{r}}(t)}_{\substack{\parallel \text{ N.II} \\ \underline{F}(t)}} - \underbrace{m \ddot{\underline{d}}(t)}_{\substack{!! \\ \underline{F}_e(t)}}$$

d.h. mit Trägheits- oder Scheinkraft  $\underline{F}_e(t) := -m \ddot{\underline{d}}(t)$  erhalten wir bzgl.  $\sigma'(t)$  ebenfalls eine Newtonsche Burgl:

$$m \ddot{\underline{r}}'(t) = \underline{F}(t) + \underline{F}_e(t)$$

Für einen bzgl.  $\sigma'(t)$  ruhenden Beobachter ist  $\underline{F}_e(t)$  real!

beachte:  $\underline{F}_e \propto m$ !

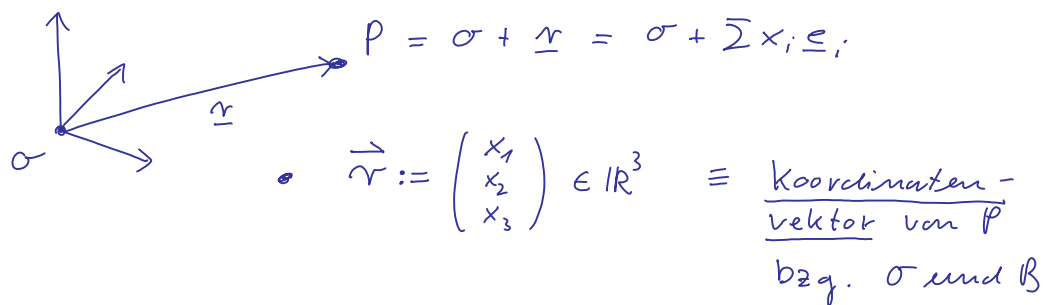
┌ Einstein: Gravitationskraft ist ebenso wie  $\underline{F}_e$  Trägheits (oder Scheinkraft): ein frei fallender Beobachter erfährt diese nämlich nicht!

└ ! inertialer Beobachter im Sinne der ART

reale Beobachter benötigen neben Bezugspkt  $\sigma$  auch orthogonales Dreibein  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$  zur Bestimmung der Komponenten  $u_1, u_2, u_3$  eines Vektors  $\underline{u} = \sum u_i \underline{e}_i$



→ Koordinatensystem =  $\mathcal{J}$ -Bezugspkt  $\sigma$   
 $\left\{ \text{ONB } B = \{ \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \} \right\}$



• allg. Vektor  $\underline{u} = \sum u_i \underline{e}_i$   
 $\rightarrow \underline{\vec{u}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad \underline{\text{Komponentenvektor von } \underline{u} \text{ bzgl. } B}$

### Inertialsystem

Ein K.S.  $(\sigma, B)$  ist Inertialsystem g.d.w. die Bahn eines kräftefreien MPs durch

$$\underline{\vec{r}}(t) = \underline{\vec{r}}_0 + \underline{\vec{v}} t$$

bzgl.  $(\sigma, B)$  beschrieben ist.

offenbar gilt in einem IS im Gegenwart einer

Kraft  $\underline{F} (= \sum F_i \underline{e}_i \rightarrow \underline{\vec{F}})$  Newt. Bzgl. im Komponenten

$$m \underline{\ddot{r}}(t) = \underline{\vec{F}}(t)$$

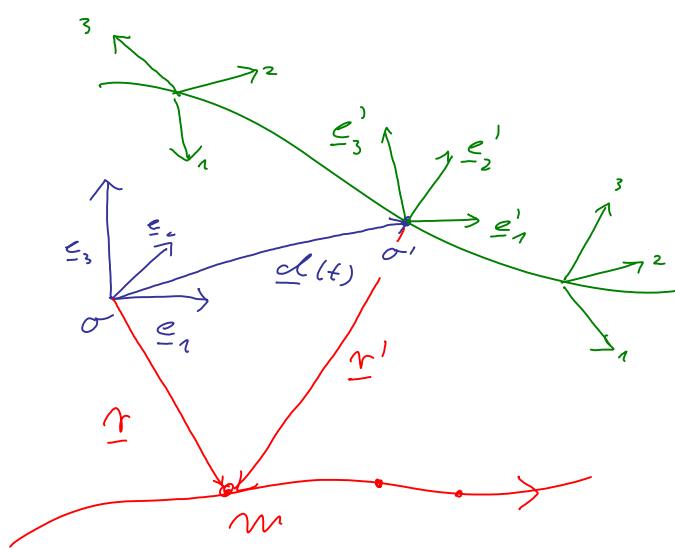
# Problem:

Ein K.S.  $\sigma', B'$  sei bzgl. I.S.  $\sigma, B$  durch

$$\vec{\sigma}\vec{\sigma}^T = \underline{d}(t) \quad \text{und} \quad B' = R(t)B \quad \text{gegeben.}$$

⌈ Rotation / Spiegelung in  $V$

Welche Bewegungsgl. erfüllt Bahn  $\vec{r}'(t)$  in  $\sigma', B'$ ?



$$m \ddot{\vec{r}}' = ?$$

einfache Rechnung:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \underline{d}$$

$$\sum x'_i \underline{e}'_i = \sum (x_i - d_j) \underline{e}_j \quad | \langle \underline{e}'_i, \dots \rangle$$

$$\rightarrow x'_e = \sum_j \langle \underline{e}'_e, \underline{e}_j \rangle (x_j - d_j)$$

$$\text{mit } \langle \underline{e}'_e, \underline{e}_j \rangle = \langle R \underline{e}_e, \underline{e}_j \rangle = \langle \underline{e}_e, R^T \underline{e}_j \rangle =: (\underline{R}^T)_{ej}$$

$$\text{also } \vec{r}' = \underline{R}^T (\vec{r} - \underline{d}) \quad \text{oder} \quad \boxed{\vec{r} = \underline{d} + \underline{R} \vec{r}'} \quad (*)$$

da  $\sigma, B$  IS folgt in Gegenwart von Kraft  $\underline{F} (= \sum F_i \underline{e}_i = \sum F'_i \underline{e}'_i)$

$$\underline{\overset{!}{F}} = m \ddot{\vec{r}} = m(\ddot{\underline{d}} + \underline{\ddot{R}} \vec{r}' + 2 \underline{\dot{R}} \dot{\vec{r}}' + \underline{R} \ddot{\vec{r}}') \quad | \underline{R}^T$$

$$m \ddot{\vec{r}}' = \underline{\overset{!}{F}}' - m \ddot{\underline{d}}' - m \underline{R}^T \underline{\ddot{R}} \vec{r}' - 2m \underline{R}^T \underline{\dot{R}} \dot{\vec{r}}'$$

=: Tragheitskräfte in  $\sigma', B'$

$$\text{Mathematik: } \underline{R}^T \underline{\dot{R}} \vec{u}' = \vec{\omega}' \times \vec{u}', \quad \underline{R}^T \underline{\ddot{R}} \vec{u}' = \vec{\omega}' \times (\vec{\omega}' \times \vec{u}') + \dot{\vec{\omega}}' \times \vec{u}'$$

⌋ wobei  $\hat{\underline{\omega}}(t)$  momentane Drehachse und  $|\underline{\omega}|$  momentane Winkelgeschw.  
s.u.

$$\rightarrow m \vec{r}' = \underbrace{\vec{F}'_l}_{\vec{F}'_l} - m \underbrace{\ddot{d}}_{\vec{F}'_2} - m \underbrace{\vec{\omega}' \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}')}_{\vec{F}'_t} - m \underbrace{\dot{\vec{\omega}}' \times \vec{r}'}_{\vec{F}'_c} = \underbrace{\vec{F}'_l + \vec{F}'_2 + \vec{F}'_t + \vec{F}'_c}_{\vec{F}'_c}$$

$$\vec{F}'_l = -m \ddot{d} : \text{ "Beschleunigungskraft" }$$

$$\vec{F}'_2 = -m \vec{\omega}' \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}') : \text{ Zentrifugalkraft (Fliehkraft) }$$

mit  $\vec{r}' = \vec{r}'_{\parallel} + \vec{r}'_{\perp}$  bzgl.  $\vec{\omega}'$  erhält man

$$\vec{F}'_2 = +m \omega'^2 \vec{r}'_{\perp}$$

$$\vec{F}'_t = -m \dot{\vec{\omega}}' \times \vec{r}' : \text{ Tangentialbeschleunigung}$$

$$\vec{F}'_c = -2m \vec{\omega}' \times \dot{\vec{r}}' : \text{ Corioliskraft}$$

$R$  normerhaltend/orthogonal  $\Leftrightarrow \forall u: |Ru| = |u|$

$$\Leftrightarrow \forall u, v: \underbrace{\langle Ru, Rv \rangle}_{\langle u, R^T R v \rangle} = \langle u, v \rangle$$

$$\Leftrightarrow \boxed{R^T R = \mathbb{1}} \quad \text{d.h.} \quad \underline{\underline{R^T R}} = \underline{\underline{\mathbb{1}_3}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir zeigen: für zeitabhängige orthogonale Transf.  $R(t)$

ist  $M := \underline{\underline{R^T \dot{R}}}$  schiefsymmetrisch:  $M^T = -M$

$$\text{d.h.} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{für geeignete } \omega_1, \omega_2, \omega_3$$

$$\text{und somit} \quad M \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2 \\ \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3 \\ \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1 \end{pmatrix} \\ = \vec{\omega} \times \vec{x}.$$

$$M \text{ schiefsymmetrisch da } 0 = \frac{d}{dt} \mathbb{1}_3 = \frac{d}{dt} (R^T R) = \dot{R}^T R + R^T \dot{R}$$

$$\begin{aligned} &= M^T + M \\ M^T &\stackrel{\uparrow}{=} \dot{R}^T R \end{aligned}$$

$$\text{ferner: } R^T \ddot{R} = \frac{d}{dt} (R^T \dot{R}) - \dot{R}^T \dot{R} = \dot{M} - \dot{R}^T R R^T \dot{R}$$

$$= \dot{M} - M^T M = \dot{M} + M M$$

$$\rightarrow R^T \ddot{R} \vec{u} = (\dot{M} + M M) \vec{u} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{u} + M (\vec{\omega} \times \vec{u}) = \underline{\underline{\dot{\vec{\omega}} \times \vec{u} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{u})}}.$$

