
Quantenmechanik – Blatt 1

Wintersemester 2025/26

Webpage: <https://www.thp.uni-koeln.de/~rk/qm25.html/>

Abgabe: bis **Sonntag, 26.10.25, 23:55** in elektronischer Form per ILIAS unter https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_6459145.html

1. Zur Diskussion

0 Punkte

- a) Was ist ein komplexer Vektorraum?
- b) Was ist ein hermitesches Skalarprodukt?
- c) Was ist ein unitärer Vektorraum?

2. Quantenmechanische Zustände und Messungen 2+5+3=10 Punkte

φ_1 und φ_2 seien orthogonale Zustände eines quantenmechanischen Systems.

- a) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\chi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2), \quad \chi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - i\varphi_2), \quad \chi_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\varphi_1 + \varphi_2),$$

normiert und damit Zustandsvektoren sind. Welche der Zustände χ_1, χ_2, χ_3 sind orthogonal zueinander?

- b) Mit welchen Wahrscheinlichkeiten ergeben die folgende Messungen jeweils ein positives Ergebnis?

- (i) Messung M_{φ_1} am System im Zustand $\psi = \chi_1$,
- (ii) Messung M_{χ_1} am System im Zustand $\psi = \varphi_1$,
- (iii) Messung M_{χ_1} am System im Zustand $\psi = \chi_2$,
- (iv) Messung M_{χ_1} am System im Zustand $\psi = \chi_3$,
- (v) Messung M_{φ_1} am System im Zustand $\psi = \chi_3$.

- c) Nun betrachten wir die ideale Messung $\tilde{M}_{\varphi_1}$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt diese Messung am System im Zustand $\psi = \chi_3$ ein negatives Ergebnis? Wie lautet in diesem Fall der Zustand ψ' nach der Messung?

3. Doppelte Messung

8 Punkte

φ_1 und φ_2 seien wieder orthogonale Zustände eines quantenmechanischen Systems. Dazu betrachten wir den Superpositionszustand

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi_1 - 2\varphi_2) .$$

Am System im Zustand $\psi = \chi$ werde zuerst die ideale Messung $\tilde{M}_{\varphi_1}$ ausgeführt, danach im Anschluss die ideale Messung $\tilde{M}_{\chi}$. Das Ergebnis der ersten Messung sei r_1 , das der zweiten r_2 . Das Gesamtergebnis der kombinierten Messung bezeichnen wir mit $E = (r_1, r_2)$. Mit welchen Wahrscheinlichkeiten ergeben sich folgende Ergebnisse:

$$(i) \ E = (0, 0), \quad (ii) \ E = (0, 1), \quad (iii) \ E = (1, 0), \quad (iv) \ E = (1, 1) \quad ?$$

Wie lauten jeweils die Zustände ψ' bzw. ψ'' nach der ersten bzw. zweiten Messung?

4. Superposition und Gemisch

6 Punkte

Wir betrachten zwei Quellen A und B von Silberatomen. Quelle A emittiert Silberatome, deren Spin sich jeweils in der quantenmechanischen Superposition $\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{z+} + \varphi_{z-})$ von "up" und "down" befindet (bzgl. z -Richtung). Quelle B emittiert dagegen Silberatome in einem sogenannten Zustands-Gemisch, bei dem sich der Spin eines Atomes zufällig im Zustand φ_{z+} ("up") oder im Zustand φ_{z-} ("down") befindet (bzgl. z -Richtung), jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$. Wie kann man anhand von Messungen an den Atomen der jeweiligen Quelle entscheiden, ob Quelle A oder B vorliegt? Oder ist das am Ende unmöglich und die quantenmechanische Superposition ist nicht von dem Zustandsgemisch zu unterscheiden?

5. Verallgemeinerte Euler-Formel

6 Punkte

Eulers Formel $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ (für $\varphi \in \mathbb{R}$) besitzt eine in der Quantenmechanik nützliche Verallgemeinerung für Pauli-Matrizen:

$$e^{i\sigma_j \varphi} = \mathbf{1} \cos \varphi + i \sigma_j \sin \varphi, \quad j = 1, 2, 3, \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Beweisen Sie diese Beziehung, indem Sie sich an den Beweis der Euler-Formel erinnern und Sie sich zudem davon überzeugen, dass für $l \in \mathbb{N}$

$$\sigma_j^{2l} = \mathbf{1}, \quad \sigma_j^{2l+1} = \sigma_j .$$

Für einen Operator A ist e^A durch die Potenzreihe der Exponentialfunktion definiert: $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$.