Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Johan Aberg
Rochus Klesse

Quantenmechanik – Blatt 10

Wintersemester 2025/26

Webpage: `https://www.thp.uni-koeln.de/~rk/qm25.html/`
Abgabe: bis **Sonntag, 11.01.26, 23:55** in elektronischer Form per ILIAS unter `https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_6459145.html`

43. Zur Diskussion *0 Punkte*

a) Wie lauten die Vertauschungsrelationen der Drehimpulsoperatoren?

b) Was ist der Zusammenhang von Rotationen und Drehimpulsoperatoren?

c) Wie lautet der Operator für die Rotation eines Spinzustands um eine Achse $\vec{n}$ und Drehwinkel φ ? Wie lautet der entsprechende Operator für die Rotation eines Teilchenzustands?

44. Rotation *3 Punkte*

Zeigen Sie, ausgehend von $R_3(\varphi) = \mathrm{e}^{J_3\varphi}$ mit $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, dass $R_3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

45. Spinrotation *3 Punkte*

Der Spin eines Elektrons sei in Richtung positiver $\vec{e}_3$ Achse polarisiert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt eine Spinmessung entlang einer Achse $\vec{e}_3{}'$, die mit $\vec{e}_3$ einen Winkel φ einschließt, eine positive bzw. negative Spinpolarisierung?

46. Drehimpulsoperatoren *2+2+3+3=10 Punkte*

$\vec{I} = (I_1, I_2, I_3)$ sei ein allgemeiner Drehimpulsoperator. Ferner seien Operatoren $I_\pm$ definiert durch

$$I_+ = I_1 + iI_2, \qquad I_- = I_1 - iI_2.$$

a) Zeigen Sie, dass das Betragsquadrat $I^2 = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2$ mit den Komponenten I_j des Drehimpulsoperatores kommutiert.

b) Zeigen Sie die Vertauschungsrelationen

$$[I_3, I_+] = +\hbar I_+, \quad [I_3, I_-] = -\hbar I_-, \quad [I^2, I_\pm] = 0.$$

c) $|a,b\rangle$ sei ein gemeinsamer Eigenzustand der Operatoren I^2 und I_3 zu Eigenwerten a und b. Zeigen Sie mittels **a)**, dass dann der Vektor $I_+ |a,b\rangle$ gemeinsamer Eigenvektor von I^2 und I_3 zu Eigenwerten a und $b+\hbar$ ist, und $I_- |a,b\rangle$ ein gemeinsamer Eigenvektor zu Eigenwerten a und $b-\hbar$ (solange $J_\pm |a,b\rangle \neq 0$).

d) Zeigen Sie, dass die Erwartungswerte von I_1 und I_2 im Zustand $|a,b\rangle$ verschwinden.
Hinweis: $\langle a,b|J_+|a,b\rangle$ betrachten.

47. Rotationsinvarianz und Drehimpulserhaltung *3+2+2=7 Punkte*

Ein Observable A ist rotationsinvariant bzgl. Achse $\vec{e}_m$ wenn der Erwartungswert $\langle A \rangle_{|\psi\rangle}$ unter Rotationstransformation $|\psi\rangle \mapsto |\psi_m(\varphi)\rangle = U_m(\varphi)\,|\psi\rangle$ des Zustands unverändert bleibt:

$$\frac{d}{d\varphi} \langle A \rangle_{|\psi_m(\varphi)\rangle} \; = \; 0 \, ,$$

für beliebige Zustände $|\psi\rangle$.

a) Zeigen Sie für eine beliebige Observable A:

$$\frac{d}{d\varphi} \langle A \rangle_{|\psi_m(\varphi)\rangle} \; = \left\langle \frac{i}{\hbar} [I_m, A] \right\rangle_{|\psi_m(\varphi)\rangle} \, .$$

b) Folgern Sie aus **a)**:

$$A \text{ ist rotationsinvariant bzgl. Achse } \vec{e}_m \qquad \Leftrightarrow \qquad [I_m, A] = 0 \, .$$

c) Folgern Sie aus **b)**: Ist der Hamiltonian H eines Systems rotationsinvariant bzgl. Achse $\vec{e}_m$, dann ist I_m eine Erhaltungsgröße; und umgekehrt.

$* * *$ *Wir wünschen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch!* $* * *$