Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Johan Aberg
Rochus Klesse

Quantenmechanik – Blatt 11

Wintersemester 2025/26

Webpage: `https://www.thp.uni-koeln.de/~rk/qm25.html/`
Abgabe: bis **Sonntag, 18.01.26, 23:55** in elektronischer Form per ILIAS unter `https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_6459145.html`

43. Zur Diskussion *0 Punkte*

Wir betrachten einen Eigenzustand $|l, m\rangle$ des Bahndrehimpulses.

1. Welche Werte können die Quantenzahlen l und m annehmen?
2. Was sind die Eigenwerte von L^2 und L_3 zum Zustand $|l, m\rangle$?
3. Wie groß sind die Erwartungswerte von L_1^2 und L_2^2 im Zustand $|l, m\rangle$?

44. Drehimpulserhaltung *2+2=4 Punkte*

Zeigen Sie:

a) Vertauscht A mit B_1 und B_2, dann vertauscht auch A mit $[B_1, B_2]$.

b) Sind zwei Komponenten des Drehimpulses $\vec{I} = (I_1, I_2, I_3)$ erhalten, so auch die dritte.

45. Drehimpulserwartungswerte *3+3=6 Punkte*

$|\psi\rangle$ sei ein Eigenzustand der Drehimpulskomponente I_3, aber nicht notwendigerweise ein Eigenzustand von I^2. Ferner gelte $\langle I_3\rangle_\psi = \hbar m$. Zeigen Sie:

a)

$$\langle I_1\rangle_\psi = 0, \qquad \langle I_2\rangle_\psi = 0.$$

b)

$$\langle I^2\rangle_\psi \ \geq \ \hbar^2 |m|(|m| + 1)\,.$$

46. Quantisierung des Bahndrehimpulses *3+3+4=10 Punkte*

In dieser Aufgaben Überzeugen Sie sich davon, dass die Komponenten des Bahndrehimpulses $\hat{\vec{L}}$ eines Teilchens nur *ganzzahlige* Vielfache von $\hbar$ als Eigenwerte haben können.

a) $f(x_1, x_2)$ sei eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \;=\; \left(-x_2\frac{\partial}{\partial x_1} \;+\; x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\right) f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,.$$

b) Begründen Sie mittels **a)**, dass die Wirkung des Operators $\hat{L}_3$ auf eine Wellenfunktion $\psi(r,\varphi,z)$ in Zylinderkoordinaten (r,φ,z) gegeben ist durch

$$\hat{L}_3\,\psi(r,\varphi,z) \;=\; -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}\psi(r,\varphi,z)\,.$$

c) Untersuchen Sie nun das Eigenwertproblem

$$\hat{L}_3\,\psi_\lambda(r,\varphi,z) \;=\; \lambda\psi_\lambda(r,\varphi,z)$$

mit dem Ansatz

$$\psi_\lambda(r,\varphi,z) = g(\varphi)h(r,z)$$

für die Eigenfunktion ψ_λ von $\hat{L}_3$ zum Eigenwert λ. Folgern Sie unter Beachtung der 2π-Periodizität von ψ_λ in φ (warum notwendig?), dass der Eigenwert λ in ganzahligen Vielfachen von $\hbar$ quantisiert ist (wie Bohr schon postuliert hatte).

47. Rotation *10 Punkte*

Das Koordinatensystem $K' = (e_1', e_2', e_3')$ gehe aus dem Standardsystem $K = (e_1, e_2, e_3)$ durch Rotation um die Achese e_2 um den Winkel α hervor. D.h.

$$e_1' = \cos(\alpha)e_1 - \sin(\alpha)e_3, \qquad e_2' = e_2, \qquad e_3' = \sin(\alpha)e_1 + \cos(\alpha)e_3.$$

I_1', I_2' und I_3' seien die Drehimpulskomponenten bzgl. des rotierten Systems K'.

Begründen Sie, dass

$$I_l' \;=\; \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}I_2\alpha}\; I_l\; \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}I_2\alpha}$$

und folgern Sie hieraus mittels der Operator-Identität (i) aus Aufgabe 42, Blatt 9, dass

$$\begin{aligned} I_1' &= \cos\alpha\, I_1 - \sin\alpha\, I_3,\\ I_2' &= I_2,\\ I_3' &= \sin\alpha\, I_1 + \cos\alpha\, I_3. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Operatoren I_l' den Drehimpulsvertauschungsrelationen genügen. Wie hätte man die Ausdrücke für I_l' einfacher herleiten können?