Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Johan Aberg
Rochus Klesse

Quantenmechanik – Blatt 12

Wintersemester 2025/26

Webpage: `https://www.thp.uni-koeln.de/~rk/qm25.html/`
Abgabe: bis **Sonntag, 25.01.26, 23:55** in elektronischer Form per ILIAS unter `https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_6459145.html`

48. Zur Diskussion *0 Punkte*

a) Wie lautet die radiale Schrödingergleichung für den Radialanteil $u(r)$ eines Teilchens im Zentralpotenzial $V(r)$?

b) Wie erhalten Sie aus einer Eigenfunktion $u(r)$ der radialen Schrödingergleiche die vollständige Eigenfunktion in sphärischen Koordinaten?

49. Matrixdarstellung der Spin-1/2 Operatoren *6 Punkte*

Stellen Sie die Spin-1/2 Operatoren S^2, $S_+ = S_1 + iS_2$ und $S_- = S_1 - iS_2$ durch 2×2 Matrizen bzgl. der Basis

$$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \equiv |z+\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \equiv |z-\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

dar. Überprüfen Sie anhand der erhaltenen Matrizen die Beziehungen

$$[S^2, S_l] = 0, \quad , [S_3, S_\pm] = \pm\hbar S_+, \quad S_+ |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = 0, \quad S_- |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \hbar |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, \qquad S_- |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = 0.$$

50. Drehimpulsaddition *2+4+4=10 Punkte*

Bahndrehimpuls $\vec{L}$ und Spin $\vec{S}$ eines Elekrons ergeben einen Gesamtdrehimpuls

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \equiv \vec{L} \otimes \mathbf{1}_S + \mathbf{1}_B \otimes \vec{S}\,.$$

Dieser Operator wirkt auf dem Tensorprodukt $\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_S$ des Ortszustandraums $\mathcal{H}_B$ und dem Spinzustandsraum $\mathcal{H}_s$ des Elektrons.

a) Zeigen Sie: die Komponenten des Gesamtdehimpuls $\vec{J}$ erfüllen die allgemeinen Drehimpulsvertrausschungsrelationen.

Im folgenden wollen wir Bahndrehimpulseigenzustände und Spineigenzustände zu Eigenzuständen des Gesamtdrehimpulses kombinieren.

b) Zeigen Sie:

$$|u\rangle = |l,l\rangle \otimes |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$$

ist Eigenzustand von J_3 zum Eigenwert $\hbar(l+\frac{1}{2})$ und zudem ist $J_+|u\rangle = 0$, wobei $J_+ = J_1 + iJ_2$. Folgern Sie hieraus mittels der Beziehung

$$J_-J_+ = J_1^2 + J_2^2 - \hbar J_3,$$

($J_- = J_1 - iJ_2$), dass $|u\rangle$ auch Eigenzustand von J^2 zum Eigenwert $\hbar^2 j(j+1)$ mit $j = l + \frac{1}{2}$ ist. Zeigen Sie darüberhinaus, dass $|u\rangle$ ebenso Eigenzustand von L^2 und S^2 zu Eigenwerten $\hbar^2 l(l+1)$ bzw. $\hbar^2\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)$ ist. Wie können Sie aus $|u\rangle$ Drehimpulszustände

$$|j,m\rangle\,, \quad m = -j,\, -j+1,\, \ldots,\, j-1,\, j$$

des Gesamtdrehimpulses erhalten?

c) Der Zustand

$$|v\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|l,l\rangle \otimes |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \quad - \quad |l,l-1\rangle \otimes |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle \;)$$

ist ein weiterer gemeinsamer Eigenzustand der Operatoren J^2, L^2, S^2 und J_3. Wie lauten die Eigenwerte? Ist $|v\rangle$ auch Eigenzustand der Operatoren L_3 und S_3?

51. Teilchen in der Kugelschale *8 Punkte*

Die Bewegungsfreiheit eines Teilchen der Masse M wird durch das Zentralpotenzial

$$V(r) = \begin{cases} \infty & : r < R \\ 0 & : R \le r \le R+a \\ \infty & : R+a < r \end{cases}$$

auf eine Kugelschale von Radius R und der Dicke a beschränkt. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass $a \ll R$. Bestimmen Sie für diesen Fall die Energieniveaus des Teilchens.

52. Störungstheorie *6+2=8 Punkte*

Ein harmonischer Oszillator mit Hamiltonoperator

$$H_0 \;=\; \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

erfährt eine lineare Störung

$$H_1 = \hbar\omega\frac{x}{l}, \qquad l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,.$$

Ermitteln Sie die Energieniveaus $E_n(\lambda)$ des gestörten Systems $H(\lambda) = H_0 + \lambda H_1$

a) in Störungstheorie einschließlich zweiter Ordnung in λ,

b) indem Sie durch eine geeignete Koordinatentransformation $H(\lambda)$ auf die Standardform eines harmonischen Oszillators bringen.