Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Johan Aberg
Rochus Klesse

Quantenmechanik – Blatt 13

Wintersemester 2025/26

Webpage: `https://www.thp.uni-koeln.de/~rk/qm25.html/`
Abgabe: bis **Sonntag, 01.02.26, 23:55** in elektronischer Form per ILIAS unter `https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_6459145.html`

53. Zur Diskussion *0 Punkte*

Wie entwickeln sich Zustände und Operatoren im Heisenberg- bzw. Wechselwirkungsbild?

54. Freies Teilchen im Heisenbergbild *6 Punkte*

$\hat{x}$ und $\hat{p}$ seien Orts- und Impulsoperator eines freies Teilchen der Masse m in einer Dimension. Stellen Sie die Heisenbergoperatoren $\hat{x}_H(t)$ und $\hat{p}_H(t)$ explizit durch $\hat{x}$ und $\hat{p}$ dar. Ermitteln Sie daraus den Ortswerwartungwert zur Zeit t zu einem Anfangszustand $|\psi_0\rangle$. Berechnen Sie ferner den Kommutator

$$[x_H(t), x_H(t')] \, .$$

55. Harmonischer Oszillator im Heisenbergbild *5+5=10 Punkte*

$\hat{x}$ und $\hat{p}$ seien Orts- und Impulsoperator eines 1D harmonischen Oszillators der Masse m und Frequenz ω. Wie üblich sind Erzeuger- und Vernichteroperatoren gegeben durch

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{l} - i\frac{l}{\hbar}\hat{p}\right), \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{l} + i\frac{l}{\hbar}\hat{p}\right), \quad l = \sqrt{\hbar/(m\omega)}\, . \tag{1}$$

a) Zeigen Sie:

$$a_H^\dagger(t) = e^{i\omega t} a^\dagger, \quad a_H(t) = e^{-i\omega t} a.$$

Hinweis: $H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$, $[a, a^\dagger] = 1$

b) Folgern Sie aus **a)** und den Relationen (1):

$$\begin{aligned} \hat{x}_H(t) &= \hat{x}\cos\omega t + \frac{\hat{p}}{m\omega}\sin\omega t \\ \hat{p}_H(t) &= -m\omega\hat{x}\sin\omega t + \hat{p}\cos\omega t \end{aligned}$$

Was bedeutet das für die zeitabhängigen Erwartungswerte von Ort und Impuls?

56. Zeitabhängige Störungstheorie

8 Punkte

Ein harmonischer Oszillator,

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2,$$

befinde sich zur Zeit $t_0 = -\infty$ im n-ten Eigenzustand $|n\rangle$. Berechnen Sie in erster Ordnung Störungstheorie die Wahrscheinlichkeit dafür, den Oszillator zur Zeit $t_1 = +\infty$ im Zustand $|m\rangle$ $(m \neq n)$ vorzufinden, wenn er der Wirkung eines zeitabhängigen Potenzials

$$V(t) \;=\; \frac{u\hat{x}}{l}\,\frac{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\tau^2}}}{\sqrt{2\pi\tau^2}}, \qquad l = \sqrt{\hbar/(m\omega)},$$

ausgesetzt ist.

Hinweis: Wie immer ist $\int \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-ax^2+bx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{b^2/4a}, \quad (a > 0,\; b \in \mathbb{C}).$