
Quantenmechanik – Blatt 2

Wintersemester 2025/26

Webpage: <https://www.thp.uni-koeln.de/~rk/qm25.html/>

Abgabe: bis **Sonntag, 02.11.25, 23:55** in elektronischer Form per ILIAS unter https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_6459145.html

6. Zur Diskussion

0 Punkte

- a) Was ist die Beziehung von Observablen und hermiteschen Operatoren?
- b) P sei die Orthogonalprojektion auf den normierten Vektor φ , ψ sei ein weiterer Vektor. Zeigen Sie, dass $\langle \psi, P\psi \rangle = |\langle \varphi, \psi \rangle|^2$.
- c) Was ist die Spektraldarstellung eines hermiteschen Operators?
- d) Weshalb berechnet sich der Erwartungswert einer Observablen A im Zustand ψ gemäß

$$\langle A \rangle_\psi = \langle \psi, \hat{A}\psi \rangle \quad ?$$

7. Stern-Gerlach-Experiment

2+2+4=8 Punkte

In z -Richtung positiv bzw. negativ polarisierte Silberatome seien durch orthonormale Zustandsvektoren φ_{z+} bzw. φ_{z-} beschrieben. In x - bzw. y -Richtung polarisierte Atome sind dann beschrieben durch Zustandsvektoren

$$\begin{aligned} \varphi_{x+} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{z+} + \varphi_{z-}), & \varphi_{x-} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{z+} - \varphi_{z-}), \\ \text{und} \quad \varphi_{y+} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{z+} + i\varphi_{z-}), & \varphi_{y-} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{z+} - i\varphi_{z-}) \end{aligned}$$

(vgl. Vorlesung).

- a) Bestimmen Sie die Betragsquadrate der Skalarprodukte $\langle \varphi_{x+}, \varphi_{y+} \rangle$ und $\langle \varphi_{z+}, \varphi_{y-} \rangle$.
- b) Zeigen Sie, dass

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3}} (\varphi_{x+} + \varphi_{y+})$$

ein normierter Vektor (und damit ein Zustandsvektor) ist.

- c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt eine μ_y -Messung an einem Silberatom im Zustand ψ das Ergebnis $+\mu_B$ bzw. $-\mu_B$? Welcher Erwartungswert $\langle \mu_y \rangle_\psi$ ergibt sich daraus?

8. Pauli-Matrizen

6+3=9 Punkte

Die Komponenten μ_x , μ_y und μ_z des magnetischen Momentes $\vec{\mu}$ eines Silberatoms bilden Observablen,

die durch Operatoren

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_x &= \mu_B (P_{\varphi_{x+}} - P_{\varphi_{x-}}) \\ \hat{\mu}_y &= \mu_B (P_{\varphi_{y+}} - P_{\varphi_{y-}}) \\ \hat{\mu}_z &= \mu_B (P_{\varphi_{z+}} - P_{\varphi_{z-}})\end{aligned}$$

dargestellt werden können (vgl. Vorlesung). Hierbei bezeichnet P_χ die Orthogonalprojektion auf einen normierten Vektor χ . Die Vektoren $\varphi_{x\pm}$, $\varphi_{y\pm}$, $\varphi_{z\pm}$ sind wie in Aufgabe 1. definiert.

- a) Zeigen Sie, dass die Abbildungsmatrizen dieser Operatoren bzgl. der ONB $(\varphi_{z+}, \varphi_{z-})$ bis auf den Faktor μ_B durch die Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben sind, also $\hat{\mu}_x = \mu_B \sigma_1$, $\hat{\mu}_y = \mu_B \sigma_2$ und $\hat{\mu}_z = \mu_B \sigma_3$ (unter der üblichen Gleichsetzung von Symbolen für Operatoren und deren Abbildungsmatrizen).

- b) Bestimmen Sie Eigenwerte und -vektoren der Pauli-Matrizen. [Tipp: Aufgabenteil a) .]

9. Operatoren in Dirac-Notation

2+2+4=8 Punkte

- a) Formulieren Sie den Operator $\hat{\mu}_z = \mu_B (P_{\varphi_{z+}} - P_{\varphi_{z-}})$ in Dirac-Notation unter Verwendung von $|\varphi_{z\pm}\rangle$ und $\langle\varphi_{z\pm}|$.
b) Berechnen Sie den Erwartungswert von μ_z im Zustand $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(|\varphi_{z+}\rangle + 2i|\varphi_{z-}\rangle)$.
c) Stellen Sie nun den Operator $\hat{\mu}_z$ durch $|x\pm\rangle$ und $\langle x\pm|$ dar, wobei

$$|x+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_{z+}\rangle + |\varphi_{z-}\rangle), \quad |x-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_{z+}\rangle - |\varphi_{z-}\rangle).$$

10. Quantenmechanische Messungen

10 Punkte

Für orthogonale Zustände $\varphi_1, \dots, \varphi_K$ eines quantenmechanischen Systems betrachten wir aufeinanderfolgende ideale Messungen $\tilde{M}_{\varphi_1}, \dots, \tilde{M}_{\varphi_K}$. Der Zustand des Systems vor der ersten Messung sei ψ_0 , der nach der letzten Messung ψ_K . Zeigen Sie:

- (i) Höchstens eine der K Messungen ist positiv.
(ii) Die i -te Messung ist positiv (und damit alle anderen negativ) mit Wahrscheinlichkeit

$$p_i = |\langle\varphi_i, \psi_0\rangle|^2.$$

In diesem Fall ist $\psi_K = \varphi_i$.

- (iii) Alle Messungen sind negativ mit Wahrscheinlichkeit

$$q_K = 1 - \sum_{i=1}^K p_i.$$

In diesem Fall ist $\psi_K = \frac{1}{\sqrt{q_K}} \bar{P}_K \psi_0$, wobei $\bar{P}_K$ die Projektion auf den Orthogonalraum von $\text{Span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_K\}$ bezeichnet.

[Hinweis: vollständige Induktion über K .]