Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Johan Aberg
Rochus Klesse

Quantenmechanik – Blatt 3

Wintersemester 2025/26

Webpage: `https://www.thp.uni-koeln.de/~rk/qm25.html/`
Abgabe: bis **Sonntag, 09.11.25, 23:55** in elektronischer Form per ILIAS unter `https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_6459145.html`

11. Zur Diskussion *0 Punkte*

a) Warum ist der Zeitentwicklungsoperator ein *unitärer* Operator?

b) Nennen Sie drei Eigenschaften des Zeitentwicklungsoperators.

c) Wie lautet der Zeitentwicklungsoperator in Energiedarstellung?

d) Warum ist die Energie in der QM eine Erhaltungsgröße?

e) Wie lautet die Schrödingergleichung für den Zeitentwicklungsoperator U_t bzw. für einem Zustand $\psi(t)$?

12. Erwartungswerte und Zeitentwicklung *3+7=10 Punkte*

$|a_0\rangle$ und $|a_1\rangle$ sind orthogonale Zustände eines quantenmechanischen Systems. Eine Observable A des Systems ist gegeben durch den Operator

$$A = \alpha \left(|a_0\rangle\langle a_1| + |a_1\rangle\langle a_0| \right), \qquad \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert von A in folgenden Zuständen:

$$|\psi_1\rangle = |a_0\rangle\,, \qquad |\psi_2\rangle = \frac{|a_0\rangle\ -\ |a_1\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad |\psi_3\rangle = \frac{|a_0\rangle\ +i\ |a_1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

b) Der Hamiltonoperator des Systems ist

$$H = E_0\,|a_0\rangle\langle a_0|\ +\ E_1\,|a_1\rangle\langle a_1|\,,$$

mit Eigenenergien $E_0 < E_1$. Zur Zeit $t = 0$ sei das System im Zustand

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a_0\rangle + i\,|a_1\rangle)\,.$$

Bestimmen Sie den Erwartungswert von A zur Zeit $t > 0$.

13. Zeitentwicklung *5+2+3=10 Punkte*

A sei eine Observable eines quantenmechanischen Systems mit Hamiltonoperator H.

a) $\psi(t)$ sei der zeitentwickelte Zustand zu einem Anfangszustand $\psi(0)$. Zeigen Sie:

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle_{\psi(t)} = \left\langle \frac{i}{\hbar}[H, A] \right\rangle_{\psi(t)}\,.$$

b) Folgern Sie aus Aufgabenteil **a)**:

$$A \text{ ist Erhaltungsgröße} \qquad \Longleftrightarrow \qquad [H,A]=0\,.$$

c) Nun sei $A(q,p)$ eine Phasenraumfunktion eines klassischen Hamiltonschen Systems mit Koordinaten $q=(q_1,\dots,q_n)$, Impulsen $p=(p_1,\dots,p_n)$ und Hamiltonfunktion $H(q,p)$. Eine *Bahn* $x(t)=(q(t),p(t))$ des Systems genügt bekanntlich den Hamiltonschen Gleichungen

$$\dot q_i(t)=\frac{\partial H}{\partial p_i}(x(t)), \qquad \dot p_i(t)=-\frac{\partial H}{\partial q_i}(x(t)).$$

Zeigen Sie:

$$\frac{d}{dt}A(x(t)) \;=\; \{H,A\}_{x(t)}\,,$$

woebi die Poissonklammer $\{F,G\}$ zweier Phasenraumfunktionen F und G gegeben ist durch

$$\{F,G\} \;=\; \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}-\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}\,.$$

14. Kommutatorrelationen *3 Punkte*

Für Aufgabe **15** benötigen wir folgende Kommutatorrelationen der Pauli-Matrizen:

$$[\sigma_1,\sigma_2] \;=\; 2i\sigma_3, \qquad [\sigma_2,\sigma_3] \;=\; 2i\sigma_1, \qquad [\sigma_3,\sigma_1] \;=\; 2i\sigma_2.$$

Verifizieren Sie diese Relationen durch direktes Nachrechnen.

15. Präzession eines magnetischen Moments *6+4=10 Punkte*

Die Komponenten μ_x, μ_y und μ_z des magnetischen Momentes $\vec\mu$ eines Silberatoms sind nach Aufgabe **8** durch Operatoren

$$\mu_x=\mu_B\sigma_1, \qquad \mu_y=\mu_B\sigma_3, \qquad \mu_z=\mu_B\sigma_3\,.$$

gegeben. Im homogenen Magnetfeld $\vec B=B\hat z$ ist die Dynamik des Moments durch den Hamiltonoperator

$$H=-B\mu_B\sigma_3$$

bestimmt. $\langle A\rangle_t$ bezeichne den Erwartungswert einer Observablen A im Zustand $\psi(t)$, den zeitentwickelten Zustand zu einem Anfangszustand $\psi(0)$.

a) Zeigen Sie mittels Aufgaben **13.a)** und **14**, dass die Erwartungswerte der $\vec\mu$-Komponenten folgendem linearen DGL-System genügen:

$$\frac{d}{dt}\langle\mu_x\rangle_t \;=\; +\omega\,\langle\mu_y\rangle_t, \qquad \frac{d}{dt}\langle\mu_y\rangle_t \;=\; -\omega\,\langle\mu_x\rangle_t, \qquad \frac{d}{dt}\langle\mu_z\rangle_t \;=\; 0\,.$$

Hierbei ist $\omega=2B\mu_B/\hbar$ die Larmorfrequenz.

b) Lösen Sie das DGL-System für den Anfangszustand $\psi(0)=\varphi_{x+}$ eines $+\hat x$-polarisierten Moments.

16. Lineare Algebra (freiwillige Wiederholung) *0 Punkte*

$B = (\varphi_1,\, \varphi_2,\, \varphi_3)$ sei eine Orthonormalbasis eines unitären Vektorraums $\mathcal{H}$.

a) Bestimmen Sie die Normen und wechselseitigen Skalarprodukte folgender Vektoren:

$$\psi_1 = \varphi_1 + 2i\varphi_2, \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix}_B, \qquad \psi_3 = \varphi_2 - i\varphi_3 \,.$$

b) Ein linearer Operator A auf $\mathcal{H}$ bildet φ_1 auf $\varphi_2 + i\varphi_3$ ab, φ_2 auf φ_1 und φ_3 auf den Nullvektor ab. Wie lautet die Abbildungsmatrix von A bzgl. Basis B?

c) Bestimmen Sie für den Operator A aus **b)** und den Vektoren ψ_i aus **a)**:

$$A\psi_1, \qquad A\psi_2, \qquad A^+\psi_1, \qquad \langle \psi_1, A\psi_3 \rangle \,.$$

d) Ist A hermitesch? Hat A einen Eigenvektor?