Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Johan Aberg
Rochus Klesse

Quantenmechanik – Blatt 5

Wintersemester 2025/26

Webpage: `https://www.thp.uni-koeln.de/~rk/qm25.html/`
Abgabe: bis **Sonntag, 23.11.25, 23:55** in elektronischer Form per ILIAS unter `https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_6459145.html`

22. Zur Diskussion — *0 Punkte*

a) Wie lautet die Ortswellenfunktion des Impulseigenzustands $|\chi_k\rangle$?

b) Was ist die Impulswellenfunktion $\tilde{\psi}(k)$ eines Teilchenzustands $|\psi\rangle$?

c) Wie erhält man die Impulswellenfunktion $\tilde{\psi}(k)$ aus der Ortswellenfunktion $\psi(x)$ des Zustands $|\psi\rangle$?

d) Wie lautet die Impulswellenfunktion des Ortseigenzustands $|\varphi_x\rangle$?

23. Integral — *2 Punkte*

Beweisen Sie mittels partieller Integration und vollständiger Induktion:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} \mathrm{d}x \; = \; n! \, , \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

24. Grundzustand des Wasserstoffatomes — *2+6=8 Punkte*

$\psi_0(\vec{x})$ sei die Wellenfunktion des Elektrons im Grundzustand $|\psi_0\rangle$ des Wasserstoffatoms. In sphärischen Koordinaten (r, ϑ, φ) lautet die Wellenfunktion (in sehr guter Näherung)

$$\psi_0(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}.$$

$a_0 \simeq 0.5892 \times 10^{-10} m$ ist der Bohrsche Atomradius.

a) Überprüfen Sie die Normierung des Zustands.

b) Ermitteln Sie folgende Erwartungswerte:

$$\langle \, \vec{x} \, \rangle_{\psi_0}, \qquad \langle |\vec{x}|^2 \rangle_{\psi_0}, \qquad \langle \, \vec{p} \, \rangle_{\psi_0}, \qquad \langle |\vec{p}|^2 \rangle_{\psi_0}.$$

[Hinweis: $\Delta f(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial f}{\partial r})$.]

25. Freies Teilchen I *3+3=6 Punkte*

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich frei in einer Dimension. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich das Teilchen im Zustand $|\psi_0\rangle$ und es gilt

$$\langle \hat{x} \rangle_{\psi_0} \; = \; x_0 \, , \qquad \langle \hat{p} \rangle_{\psi_0} \; = \; p_0 \, .$$

a) Zeigen Sie, dass für $t \geq 0$

$$\langle \hat{p} \rangle_{\psi(t)} \; = \; p_0 \, , \qquad \langle \hat{x} \rangle_{\psi(t)} \; = \; x_0 \; + \; \frac{p_0}{m} \, t \, .$$

[Hinweis: Aufgabe **13 a)**]

b) Verallgemeinern und beweisen Sie die Aussage aus **a)** für ein freies Teilchen in drei Raumdimensionen.

26. Freies Teilchen II *2+1+7=10 Punkte*

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich frei in einer Dimension.

a) Zur Zeit $t = 0$ befindet sich das Teilchen in einem Zustand $|\psi(0)\rangle$ mit Impulswellenfunktion $\tilde{\psi}(k)$, d.h.

$$|\psi(0)\rangle \; = \; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \, \tilde{\psi}(k) \, |\chi_k\rangle \; .$$

Zeigen Sie, das für $t \geq 0$

$$|\psi(t)\rangle \; = \; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \, \tilde{\psi}(k) \, e^{-i \frac{\hbar k^2}{2m} t} \, |\chi_k\rangle \; .$$

b) Folgern Sie aus **a)**, dass die Ortswellenfunktion des Teilchens zur Zeit $t \geq 0$ gegeben ist durch

$$\psi(x,t) \; = \; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \, \tilde{\psi}(k) \, e^{-i \frac{\hbar k^2}{2m} t + ikx} \, .$$

c) Nun sei konkret

$$\tilde{\psi}(k) \; = \; (4\pi\sigma_0^2)^{\frac{1}{4}} \, e^{-\frac{\sigma_0^2}{2} k^2} \, ,$$

wobei σ_0 eine positive Konstante der Dimension *Länge*. Bestimmen Sie die Ortswellenfunktion $\psi(x)$ des Anfangszustands $|\psi(0)\rangle$ und zeigen Sie mittels **b)**, dass die Aufenthaltswahscheinlichkeitsdichte zur Zeit $t \geq 0$ gegeben ist durch

$$|\psi(x,t)|^2 \; = \; \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma_t^2}} \, e^{-\frac{x^2}{\sigma_t^2}}, \quad \text{wobei} \quad \sigma_t = \sigma_0 \sqrt{1 + \frac{t^2}{\tau^2}} \quad \text{und} \quad \tau = \frac{m\sigma_0^2}{\hbar} \, .$$

Hinweis: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-ax^2+bx} \; = \; \sqrt{\frac{\pi}{|a|}} \; e^{b^2/4a}$ für $a, b \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(a) > 0$.