Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Johan Aberg
Rochus Klesse

Quantenmechanik – Blatt 6

Wintersemester 2025/26

Webpage: `https://www.thp.uni-koeln.de/~rk/qm25.html/`
Abgabe: bis **MONTAG, 01.12.25, 23:55** in elektronischer Form per ILIAS unter
`https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_6459145.html`

27. Energieeigenzustände in einer Dimension *3+5=8 Punkte*

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich in einer Dimension in einem (nicht-divergenten) Potenzial $U(x)$. Zeigen Sie:

a) Der Impulserwartungswert in einem gebundenen (d.h. normierbaren) Energieeigenzustand verschwindet.
Hinweis: Beweise und verwende $\hat{p} = \frac{i}{\hbar} m[H, \hat{x}]$.

b) Zwei normierbare Energieeigenfunktionen $\phi_a(x)$ und $\phi_b(x)$ zu ein und derselben Energie E können sich nur um einen konstanten Faktor unterscheiden. (Die Eigenenergien gebundener Zustände sind also nicht entartet.)
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Größe $\phi_a'\phi_b - \phi_a\phi_b'$ unabhängig von x ist.

28. Teilchen im Kasten *6+6=12 Punkte*

Ein Teilchen der Masse m befindet sich in einem eindimensionalen Kasten mit undurchdringlichen Wänden bei $x = 0$ und $x = L$. Es besitzt normierte Energieeigenfunktionen

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k_n x), \quad k_n = \frac{\pi}{L} n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

zu Eigenenergien $E_n = \hbar^2 k_n^2 / 2m$.

a) Bestimmen Sie für $i, j \in \{1, 2\}$ folgende Matrixelemente von Ort-, Impuls- und Hamilton-Operator:

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \langle \phi_i | x | \phi_j \rangle \\ p_{ij} &= \langle \phi_i | p | \phi_j \rangle \\ H_{ij} &= \langle \phi_i | H | \phi_j \rangle \end{aligned}$$

Hinweise: $\int_0^\pi dx\, x\, \sin x\, \sin 2x = -\frac{8}{9}$, $\int_0^\pi dx\, \cos x\, \sin 2x = \frac{4}{3}$.

b) Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das System im Zustand $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle)$. Bestimmen Sie unter Verwendung der unter **a)** ermittelten Matrixelemente die Erwartungswerte von Ort, Impuls und Energie des Teilchens für $t \geq 0$.

29. Kraft *5 Punkte*

Wie betrachten noch einmal das Teilchen im Kasten wie in der vorherigen Aufgabe. Das Teilchen befinde sich diesmal im n-ten Energieeigenzustand. Welche Kraft übt es auf die bei $x = L$ befindliche Wand aus? Wie hängt diese Kraft von der Eigenenergie ab? Was würde eine klassische Betrachtung ergeben?

Hinweis: QM: betrachten Sie eine kleine Verschiebung der Wand um δL unter der Annahme, dass das Teilchen dabei immer im jeweiligen n-ten Energieeigenzustand verbleibt.

30. Teilchen im δ-Potenzial *6 Punkte*

Ein Teilchen der Masse m ist im eindimensionalen Potenzial $U(x) = -u\delta(x)$ mit $u > 0$ gebunden. Bestimmen Sie Energie E (< 0) und Energieeigenfunktion $\phi(x)$ des einzigen gebundenen Zustands.

Anleitung: Benutzen Sie den Ansatz $\phi(x) = \alpha e^{-\beta|x|}$, mit freien Parametern α und β. Beachten Sie, dass aufgrund des in 0 divergierenden Potenzials die Ableitung von ϕ in $x = 0$ *unstetig* ist. Ermitteln Sie $\delta\phi' := \lim_{a\to 0+}(\phi'(a) - \phi'(-a))$, indem Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung über $[-a, a]$ integrieren.