
Quantenmechanik – Blatt 7

Wintersemester 2025/26

Webpage: <https://www.thp.uni-koeln.de/~rk/qm25.html>

Abgabe: bis **Sonntag, 07.12.25, 23:55** in elektronischer Form per ILIAS unter https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_6459145.html

31. Zur Diskussion

0 Punkte

- a) Wie lautet die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\vec{j}(\vec{x}, t)$ eines Teilchenzustands mit Wellenfunktion $\psi(\vec{x}, t)$?
- b) In welcher Beziehung stehen $\vec{j}(\vec{x}, t)$ und die Aufenthaltswahrscheinlichkeit $|\psi(\vec{x}, t)|^2$ des Teilchens?
- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichten zu 1D–Teilchenzuständen mit Wellenfunktionen

$$\chi_k(x) = e^{ikx}, \quad \phi(x) = e^{ikx} + re^{-ikx}, \quad \text{wobei } r \in \mathbb{C}, |r| \leq 1.$$

32. Freies Teilchen

2+6=8 Punkte

Ein freies Teilchen befindet sich zur Zeit $t = 0$ in einem Zustand mit Wellenfunktion $\psi_0(x)$. Nach der Zeit $t > 0$ lautet die Wellenfunktion $\psi(x, t)$. Ein anderes Teilchen befindet sich zur Zeit $t = 0$ in einem Zustand mit Wellenfunktion $\chi_0(x) = e^{i\frac{p_0}{\hbar}x}\psi_0(x)$, wobei p_0 eine Konstante der Dimension *Impuls* ist. Zeigen Sie

a)

$$\langle \hat{p} \rangle_{\chi_0} = \langle \hat{p} \rangle_{\psi_0} + p_0.$$

b)

$$|\chi(x, t)| = |\psi(x - \frac{p_0}{m}t, t)|.$$

33. Fallende Potenzialstufe

6+2=8 Punkte

Ein Teilchen der Masse m nähert sich aus $x = -\infty$ kommend mit Impuls $p > 0$ der fallenden Potenzialstufe

$$U(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ -W, & x > 0 \quad (W > 0). \end{cases}$$

- a) Berechnen Sie mit einem geeigneten Streuansatz die Reflexionswahrscheinlichkeit R des Teilchens als Funktion der Teilchenenergie $E = p^2/2m$. Wie verhält sich die Reflexionswahrscheinlichkeit für konstante Energie E im Grenzfall $W \rightarrow \infty$?

- b) Ein Strahl monoenergetischer Elektronen wird senkrecht auf eine Metalloberfläche gerichtet. Im Metall liegt das Potenzial $-W = -8eV$ vor, die Elektronen im Strahl haben die Energie $+0.1eV$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden die Elektronen an der Metalloberfläche reflektiert?

34. Streuung am δ -Potenzial

10 Punkte

Untersuchen Sie die Streuung eines Teilchens der Masse m am Potenzial

$$U(x) = u \delta(x)$$

mittels eines geeigneten Streuansatzes. Ermitteln Sie die Transmissionswahrscheinlichkeit als Funktion der Teilchenenergie E . Für welche Energie E_0 ist die Transmissionswahrscheinlichkeit $1/2$? Skizzieren Sie die Transmissionswahrscheinlichkeit als Funktion von $\mathcal{E} = E/E_0$.

35. Feldemission

6 Punkte

Unter dem Einfluss eines starken elektrischen Felds senkrecht zur Oberfläche eines Metalls werden Leitungselektronen aus dem Metall gelöst. Zur Beschreibung dieses als *Feldemission* bezeichneten Phänomens verwenden wir ein vereinfachtes 1D Modell-Potenzial

$$U(x) = \begin{cases} -W & : x < 0 \quad (\text{Metall, feldfrei}) \\ -e\mathcal{E}x & : x > 0 \quad (\text{Vakuum + elektr. Feld}) , \end{cases} \quad (1)$$

wobei $W > 0$ die Austrittsarbeit, \mathcal{E} die elektrische Feldstärke und e die Elementarladung bezeichnet ($e\mathcal{E}$ positiv). Zudem nehmen wir an, dass sich im Metall Elektronen bei einer Energie $-W < E < 0$ befinden und diese die Potenzialbarriere an der Metalloberfläche durchtunneln. Das Resultat ist ein Tunnelstrom $I = I_0 T$, wobei I_0 ein konstanter Parameter und T die durch E und $U(x)$ bestimmte Transmissionswahrscheinlichkeit ist. Bestimmen Sie T in Gamow-Näherung,

$$T \simeq \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int \sqrt{8m(V(x) - E)} dx\right),$$

und damit den Tunnelstrom I als Funktion von E und \mathcal{E} . Angenommen $E = -1eV$, ab welcher Größenordnung der elektrischen Feldstärke \mathcal{E} können Sie mit einem signifikanten Tunnelstrom rechnen?