Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Johan Aberg
Rochus Klesse

Quantenmechanik – Blatt 8

Wintersemester 2025/26

Webpage: `https://www.thp.uni-koeln.de/~rk/qm25.html/`
Abgabe: bis **Sonntag, 14.12.25, 23:55** in elektronischer Form per ILIAS unter `https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_6459145.html`

36. Zur Diskussion *0 Punkte*

a) Wie ist der Propagator $K(x_f, x_i, t)$ eines Teilchens definiert?

b) Wie kann die Wellenfunktion $\psi(x,t)$ eines Teilchenzustands zur Zeit $t > 0$ anhand der Anfangswellenfunktion $\psi(x,0)$ und dem Propagator ermittelt werden?

c) Wie lautet die Pfadintegraldarstellung des Propagators?

d) Welche Pfade tragen signifikant zum Pfadintegral des Propagators bei?

37. Klassische Bewegungsgleichungen *4+4+4=12 Punkte*

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich im eindimensionalen Potenzial $U(x)$. Der Teilchenzustand zur Zeit t sei ψ_t. In dieser Aufgabe zeigen Sie, dass die zeitabhängigen Erwartungswerte von Ort und Impuls des Teilchens den klassischen Bewegungsleichungen genügen, d.h.

$$m\frac{d}{dt}\langle\hat{x}\rangle_{\psi_t} = \langle\hat{p}\rangle_{\psi_t}, \quad \frac{d}{dt}\langle\hat{p}\rangle_{\psi_t} = \langle F(\hat{x})\rangle_{\psi_t}, \quad \text{und damit auch} \quad m\frac{d^2}{dt^2}\langle\hat{x}\rangle_{\psi_t} = \langle F(\hat{x})\rangle_{\psi_t}\,, \tag{1}$$

wobei $F(x) = -U'(x)$ die *Kraft* zum Potenzial U ist.

a) Beweisen Sie obige Relationen. [Hinweis: Aufgabe 13.a)]

b) Konkret sei $U(x)$ das Potenzial eines eindimensionalen Oszillators,

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2, \qquad k > 0.$$

Ferner seien Ort- und Impulserwartungswert des Teilchens zur Zeit $t = 0$ gegeben,

$$\langle\hat{x}\rangle_{\psi_0} = x_0, \quad \langle\hat{p}\rangle_{\psi_0} = p_0\,.$$

Ermitteln Sie anhand der Bewegungsgleichungen (1) die Erwartungswerte von Ort und Impuls des Teilchens für Zeiten $t > 0$.

c) Können die zeitabhängigen Erwartungswerte von Ort und Impuls immer (d.h. für beliegbige $U(x)$) wie unter **b)** durch Lösen der klassischen Bewegungsgleichungen bestimmt werden? Konstruieren Sie ggf. ein Gegenbeispiel.

38. Teilchen im Schwerefeld

6+4=10 Punkte

Teilchen der Masse m durchlaufen ein Interferometer und werden in einem Detekor registriert (vgl. Skizze). Um den Einfluss der Schwerkraft zu untersuchen, kann das Interferometer um die horizontale Achse $\hat{n}$ um einen variablen Winkel ϑ gedreht werden (vgl. Skizze).

a) Ermitteln Sie die Detektionsrate P der Teilchen im Interferometer als Funktion der Längen a, b, der Teilchenenergie E und des Winkels ϑ. Für welches Verhältnis von a/b ergibt sich bei konstanter Gesamtlänge $a+b$ die größte Sensitivität des Interferometers?
(Hinweis: Am einfachsten geht es mit dem Pfadintegral in semiklassischer Näherung.)

b) Die Teilchen seien Neutronen mit Masse $m = 1.67 \times 10^{-27} kg$, Geschwindigkeit $v = 2700 m/s$ und zudem $a = b = 1cm$ (wie etwa im Experiment von Colella, Overhauser, Werner 1975). Wieviele lokale Maxima sollte man in der Detektionsrate $P(\vartheta)$ zu beobachten sein, wenn ϑ von 0 auf $\pi/2$ erhöht wird?