Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Johan Aberg
Rochus Klesse

Quantenmechanik – Blatt 9

Wintersemester 2025/26

Webpage: `https://www.thp.uni-koeln.de/~rk/qm25.html/`
Abgabe: bis **Sonntag, 21.12.25, 23:55** in elektronischer Form per ILIAS unter `https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_6459145.html`

39. Zur Diskussion: harmonischer Oszillator *0 Punkte*

a) Wie lauten die Eigenenergien eines harmonischen Oszillators der Frequenz ω?

b) Was ist die Grundzustandseigenfunktion eines harmonischen Oszillators mit Masse m und Frequenz ω?

c) Welche Bedeutung haben die Leiteroperatoren a und a^+ ? Wie sind sie definiert? Was ist $[a, a^+]$, $a\,|n\rangle$, $a^+\,|n\rangle$? ($|n\rangle$ ist der n-te Energieeigenzustand des Oszillators.)

d) Was ist die Bedeutung des Operators $\hat{n} = a^+a$? Was ist $[\hat{n}, a]$ und $[\hat{n}, a^+]$? Wie kann der Hamiltonoperator des harmonische Oszillators mittels $\hat{n}$ dargestellt werden?

40. Harmonischer Oszillator *1+4+4=9 Punkte*

a und a^+ seien die aus der Vorlesung bekannten Vernichter- und Erzeuger-Operatoren eines harmonischen Oszillators mit Masse m und Frequenz ω.

a) Zeigen Sie:

$$\frac{\hat{x}}{l} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^+ + a), \qquad \frac{l\hat{p}}{\hbar} = \frac{i}{\sqrt{2}}(a^+ - a), \qquad \text{wobei} \quad l = \sqrt{\hbar/m\omega}\,.$$

b) Bestimmen Sie mittels Aufgabenteil **a)** die Erwartungswerte von $\hat{x}$, $\hat{p}$, $\hat{x}^2$ und $\hat{p}^2$ im n-ten Energieeigenzustand $|n\rangle$ des Oszillators.

c) Bestimmen Sie ebenso für alle n, m mit $n \neq m$ und $m > 1$ die Matrixemelemente $\langle n|\,\hat{x}\,|m\rangle$ und $\langle n|\,\hat{x}^2\,|m\rangle$.

41. Geladenes Teilchen im Magnetfeld *1+7=8 Punkte*

Ein Teilchen der Masse m und elektrischer Ladung q bewegt sich unter dem Einfluss eines homogenen Magnetfelds $\vec{B} = B\vec{e}_3$. Mit einem Vektorpotenzial $\vec{A}$ ein Vektorpotenzial des Magnetfelds ist der Hamiltonoperator des Teilchens durch

$$H = \frac{1}{2m}\left(\hat{\vec{p}} - q\vec{A}(\vec{x})\right)^2 \tag{1}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass $\vec{A}(\vec{x}) = Bx_1\,\vec{e}_2$ ein Vektorpotenzial des Magnetfelds $\vec{B} = B\vec{e}_3$ ist.

b) Wir suchen nun die Eigenenergien und -zustände des Teilchens für das Vektorpotenzial aus Aufgabenteil **a)** im Hamiltonoperator (1). Zeigen Sie, dass der Ansatz

$$\psi_{k_2,k_3}(\vec{x}) = \phi(x_1)e^{ik_2x_2}e^{ik_3x_3}$$

für einen Eigenzustand auf ein Oszillator-Problem führt und und lösen Sie dieses. Wie lauten demnach die Eigenenergien und -zuständes des Teilchens?

42. Operator-Identitäten

5+5=10 Punkte

In dieser Aufgabe beweisen wir zwei in der Quantenmechanik nützliche Operator-Identitäten:

(i) $\mathrm{e}^{A}B\mathrm{e}^{-A} \;=\; \mathrm{e}^{[A,\dots]}B \;\equiv\; B + [A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \frac{1}{3!}[A,[A,[A,B]]] + \cdots\,,$

(ii) kommutieren A und B jeweils mit $[A, B]$, so gilt: $\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B} \;=\; \mathrm{e}^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}\,.$

Die zweite Identität ist ein Spezialfall der allgemeineren *Baker-Campbell-Hausdorff-Identität*.

a) Beweis von (i): Zeigen Sie, dass die operatorwertige Funktion

$$f(\lambda) = \mathrm{e}^{\lambda A}B\mathrm{e}^{-\lambda A}$$

spezielle Lösung der DGL

$$\frac{d}{d\lambda}f = [A,\dots]f$$

zum Anfangswert $f(0) = B$ ist. Durch direkte Integration der DGL können Sie diese spezielle Lösung ebenfalls erhalten, was Ihnen für $\lambda = 1$ die zu beweisenden Identität liefert.

b) Zum Beweis von (ii) verfahren wir ähnlich und betrachten diesmal die operatorwertige Funktion

$$g(\lambda) = \mathrm{e}^{\lambda A}\mathrm{e}^{\lambda B}\,,$$

wobei hier A und B mit $[A, B]$ kommutieren. Zeigen Sie unter Verwendung von **a)**, dass $g(\lambda)$ spezielle Lösung der DGL

$$\frac{d}{d\lambda}g = (A + B + \lambda[A,B])\,g$$

zum Anfangswert $f(0) = \mathbf{1}$ ist. Auch hier können Sie diese spezielle Lösung durch direkte Integration der DGL bestimmen und daraus die zu beweisende Identität erhalten.