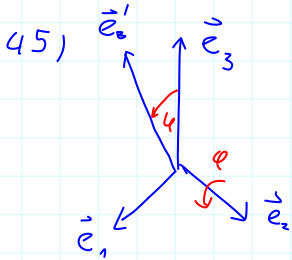


Lösungshinweise Blatt 10

44) Mit $J_3^0 = \mathbb{1}_3$, $J_3^{2\ell} = (-1)^\ell \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_3^{2\ell+1} = (-1)^\ell J_3$
für $\ell \in \mathbb{N}$ folgt

$$e^{J_3 \varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} \varphi^{2\ell} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\cos \varphi} + \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!} \varphi^{2\ell+1} J_3}_{\sin \varphi}$$

$$= R_3(\varphi) \quad .$$



$$\rightarrow |z^+\rangle = U_2(\varphi) |z^+\rangle \quad \text{mit}$$

$$U_2(\varphi) = e^{-i \frac{\sigma_2}{2} \varphi} = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \mathbb{1} - i \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sigma_2$$

$$= \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \mathbb{1} + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow P_+^1 = |\langle z^+ | z^+ \rangle|^2 = \cos^2(\varphi/2)$$

$$P_-^1 = 1 - P_+^1 = \sin^2(\varphi/2)$$

46) a) $[I^2, I_3] = [I_1^2, I_3] + [I_2^2, I_3]$

$$= I_1 \underbrace{[I_1, I_3]}_{-i\hbar I_2} + \underbrace{[I_1, I_3] I_1}_{-i\hbar I_2} + I_2 \underbrace{[I_2, I_3]}_{i\hbar I_1} + \underbrace{[I_2, I_3] I_2}_{i\hbar I_1} = 0$$

analog: $[I^2, I_1] = 0$, $[I^2, I_2] = 0$

b)

$$[I_3, I_+] = \underbrace{[I_3, I_1]}_{i\hbar I_2} + i \underbrace{[I_3, I_2]}_{-i\hbar I_1} = \hbar(I_1 + iI_2) = \hbar I_+$$

$$[I_3, I_-] = \underbrace{[I_3, I_1]}_{i\hbar I_2} - i \underbrace{[I_3, I_2]}_{-i\hbar I_1} = -\hbar(I_1 - iI_2) = \hbar I_-$$

$$[I^2, I_\pm] = [I^2, I_1] \pm i [I^2, I_2] = 0$$

a)

c) $I^2(\underline{I_\pm |a, b\rangle}) \stackrel{b)}{=} \underline{I_\pm (I^2 |a, b\rangle)} = I_\pm a |a, b\rangle = a (\underline{I_\pm |a, b\rangle})$,
d.h. $I_\pm |a, b\rangle$ EV zum EW a von I^2 .

$$I_3 (\underline{I_\pm |a, b\rangle}) = (I_\pm I_3 + \underbrace{[I_3, I_\pm]}_{\stackrel{c)}{=} \pm \hbar I_\pm}) |a, b\rangle$$

$$= I_\pm (b \pm \hbar) |a, b\rangle = \underline{(b \pm \hbar) (I_\pm |a, b\rangle)}$$

d.h. $I_\pm |a, b\rangle$ EV zum EW $b \pm \hbar$ von I_3 .

d) $\langle a, b | I_+ | a, b \rangle = \langle a, b | a, b+b \rangle = 0$, da
Eigen zu unterschiedlichen EWen orthogonal;

$$\rightarrow 0 = \langle a, b | I_1 + i I_2 | a, b \rangle = \langle I_1 \rangle_{|a,b\rangle} + i \langle I_2 \rangle_{|a,b\rangle}$$

d.h. $\langle I_1 \rangle_{|a,b\rangle} = 0$, $\langle I_2 \rangle_{|a,b\rangle} = 0$.

47) a) Mit $\langle A \rangle_{\psi_m(\varphi)} = \langle \psi | U_m^\dagger(\varphi) A U_m(\varphi) | \psi \rangle$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} \langle A \rangle_{\psi_m(\varphi)} &= \left\langle \frac{d}{d\varphi} \left(\underbrace{U_m^\dagger(\varphi)}_{e^{i I_m \varphi / \hbar}} A \underbrace{U_m(\varphi)}_{e^{-i I_m \varphi / \hbar}} \right) \right\rangle_\psi \\ &= \left\langle U_m^\dagger(\varphi) \left[\frac{i}{\hbar} I_m A U_m(\varphi) + U_m^\dagger A \left(-\frac{i}{\hbar} I_m \right) U_m(\varphi) \right] \right\rangle_\psi \\ &= \left\langle \frac{i}{\hbar} (I_m A - A I_m) \right\rangle_{\psi_m(\varphi)} \quad \square \end{aligned}$$

b) " $\Rightarrow$ ": $0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{d\varphi} \langle A \rangle_{\psi_m(0)} = \left\langle \frac{i}{\hbar} [I_m, A] \right\rangle_\psi$

für alle $\psi \rightarrow [I_m, A] = 0$

" $\Leftarrow$ "

$$\frac{d}{d\varphi} \langle A \rangle_{\psi_m(\varphi)} = \left\langle \frac{i}{\hbar} \underbrace{[I_m, A]}_{=0} \right\rangle_{\psi_m(\varphi)} = 0,$$

d.h. A rotationsinvariant bzgl. Achse $\vec{e}_m$.

c) • Ist H rot. inv. bzgl. $\vec{e}_m$, so nach b) $[H, I_m] = 0$,
d.h. I_m ist Erhaltungsgröße.

• Ist I_m Erhaltungsgröße, so ist $[H, I_m] = 0$; nach

b) dann H rot. inv. bzgl. $\vec{e}_m$.