

Lösungshinweise Blatt 11

$$\begin{aligned} 44 a) \quad [A, [B_1, B_2]] &= [A, B_1 B_2] - [A, B_2 B_1] \\ &= B_1 [A, B_2] + [A, B_1] B_2 - B_2 [A, B_1] - [A, B_2] B_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

b) Sind etwa I_1, I_2 erhalten, so vertauschen I_1, I_2 mit H ; nach a) vertauscht H dann auch mit $[I_1, I_2] = i\hbar I_3$; d.h. $[H, I_3] = 0$ und somit auch I_3 Erhaltungsgröße.

$$45) \quad |\psi\rangle \stackrel{!}{=} \sum_{\ell \geq |m|} c_\ell |\ell, m\rangle$$

$$\begin{aligned} a) \quad \langle \psi | I_+ | \psi \rangle &= \sum_{\ell \ell' \geq |m|} c_\ell^* c_\ell \langle \ell', m | I_+ | \ell, m \rangle = 0 \\ &\quad \text{"} \\ &\quad I_1 + i I_2 \end{aligned}$$

$$\rightarrow 0 = \underbrace{\langle I_1 \rangle_\psi}_{\text{reell}} + i \underbrace{\langle I_2 \rangle_\psi}_{\text{reell}} \leadsto \langle I_1 \rangle_\psi = 0, \langle I_2 \rangle_\psi = 0$$

46) a)

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) &= \left(\underbrace{-r \sin \varphi}_{-x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} + \underbrace{r \cos \varphi}_{x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) f\left(\underbrace{r \cos \varphi}_{x_1}, \underbrace{r \sin \varphi}_{x_2}\right) \\ &= \left(-x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) f(x_1, x_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b)} \quad \hat{L}_3 \psi(x_1, x_2, x_3) &= (\hat{x}_1 \hat{p}_2 - \hat{x}_2 \hat{p}_1) \psi(x_1, x_2, x_3) \\ &= i\hbar \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \psi(x_1, x_2, x_3) \\ &\stackrel{\text{a)}}{=} -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \psi(r, \varphi, z)\end{aligned}$$

c) Ansatz in $\hat{L}_3 \psi_\lambda = \lambda \psi_\lambda$ führt nach b)

$$\text{auf} \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} g(\varphi) = i \frac{\lambda}{\hbar} g(\varphi)$$

$$\rightarrow g(\varphi) = g_0 e^{i \frac{\lambda}{\hbar} \cdot \varphi}$$

$$2\pi\text{-Periodizität bedeutet} \quad e^{i \frac{\lambda}{\hbar} \cdot 2\pi} = 1$$

$$\rightarrow \frac{\lambda}{\hbar} \text{ ist } \underline{\text{ganze Zahl}} (n \rightarrow \lambda = \hbar \cdot n)$$

47) ("passive") Transformation $K \rightarrow K' = R_2(\alpha) K$

$\hat{=}$ ("aktive") Transformation der Zustände mit

$$U_2(-\alpha) = e^{\frac{i}{\hbar} I_2 \alpha}$$

d.h. $\langle I_\ell' \rangle_\psi = \langle I_\ell \rangle_{U_2(-\alpha)\psi} = \langle \psi | U_2^\dagger(-\alpha) I_\ell U_2(-\alpha) | \psi \rangle$

$$= \langle \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar} I_2 \alpha} I_\ell e^{\frac{i}{\hbar} I_2 \alpha}}_{=} \rangle_\psi$$

d.h. $I_\ell' = e^{-\frac{i}{\hbar} I_2 \alpha} I_\ell e^{\frac{i}{\hbar} I_2 \alpha}$

$$\uparrow = e^{\alpha [-\frac{i}{\hbar} I_2, \dots]} I_\ell$$

vgl. Aufgabe 42

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_1' &= I_1 + \underbrace{\alpha \left[-\frac{i}{\hbar} I_2, I_1 \right]}_{\parallel -I_3} + \underbrace{\frac{\alpha^2}{2!} \left[-\frac{i}{\hbar} I_2, -I_3 \right]}_{\parallel -I_1} \\ &\quad + \underbrace{\frac{\alpha^3}{3!} \left[-\frac{i}{\hbar} I_2, -I_1 \right]}_{\parallel +I_3} + \underbrace{\frac{\alpha^4}{4!} \left[-\frac{i}{\hbar} I_2, I_3 \right]}_{\parallel +I_1} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d.h. } I_1' &= I_1 \left(1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \dots - \dots \right) \\
 &\quad + I_3 \left(-\alpha + \frac{\alpha^3}{3!} - \frac{\alpha^5}{5!} + \dots - \dots \right) \\
 &= \cos \alpha \, I_1 - \sin \alpha \, I_3
 \end{aligned}$$

analoge Rechnung für I_3' ergibt

$$I_3' = \sin \alpha \, I_1 + \cos \alpha \, I_3$$

$$\bullet \quad I_2' = e^{-\frac{i}{\hbar} I_2 \alpha} I_2 e^{\frac{i}{\hbar} I_2 \alpha} = I_2$$

Vertauschungsrelationen: mit $U \equiv e^{\frac{i}{\hbar} I_2 \alpha}$

$$[I_h', I_e'] = [U^\dagger I_h U, U^\dagger I_e U]$$

$$\begin{aligned}
 &= U^\dagger [I_h, I_e] U = i\hbar \varepsilon_{hlm} U^\dagger I_m U = i\hbar \varepsilon_{hlm} I_m' \\
 &U U^\dagger = \mathbb{1}
 \end{aligned}$$



alternative Herleitung:

I_e' ist Generator der Rotationsrafo

$$U_{\vec{e}_e'}(\varphi) = e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{e}_e' \cdot \vec{I}_e} \varphi$$

d.h. $I_e' = i\hbar \left. \frac{d}{d\varphi} U_{\vec{e}_e'}(\varphi) \right|_{\varphi=0} = \vec{e}_e' \cdot \vec{I}$

$$\rightarrow I_1' = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ 0 \\ -\sin\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \cos\alpha I_1 - \sin\alpha I_3$$

ebenso folgt $I_2' = I_2$, $I_3' = \sin\alpha I_1 + \cos\alpha I_3$.