Lösungshinweise Blatt 3

12 a)
$$\langle A\rangle_{\psi_1} = \langle a_0|A|a_0\rangle = 0$$

$$\langle A\rangle_{\psi_2} = \frac{\alpha}{2}\big(\langle a_0| - \langle a_1|\big)\big(|a_0\rangle\langle a_1| + |a_1\rangle\langle a_0|\big)\big(|a_0\rangle - |a_1\rangle\big)$$
$$= \frac{\alpha}{2}(-1-1) = -\alpha$$

$$\langle A\rangle_{\psi_2} = \frac{\alpha}{2}\big(\langle a_0| - i\langle a_1|\big)\big(|a_0\rangle\langle a_1| + |a_1\rangle\langle a_0|\big)\big(|a_0\rangle + i|a_1\rangle\big)$$
$$= \frac{\alpha}{2}(i - i) = 0$$

b)
$$U_t = e^{-iE_0 t}|a_0\rangle\langle a_0| + e^{-iE_1 t}|a_1\rangle\langle a_1| \qquad (\hbar = 1)$$

$$\rightarrow |\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}U_t\big(|a_0\rangle + i|a_1\rangle\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-iE_0 t}|a_0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}e^{-E_1 t}|a_1\rangle$$

$$\rightarrow \langle A\rangle_{\psi(t)} = \frac{\alpha}{2}\big(e^{iE_0 t}\langle a_0| - i\,e^{iE_1 t}\langle a_1|\big)\big(|a_0\rangle\langle a_1| + |a_1\rangle\langle a_0|\big)\cdot$$
$$\cdot\big(e^{-iE_0 t}|a_0\rangle + i\,e^{-iE_1 t}|a_1\rangle\big)$$

$$= \frac{\alpha}{2}\Big(i\,e^{-i(E_1-E_0)t} - i\,e^{i(E_1-E_0)t}\Big)$$

$$= \alpha\sin\Big(\frac{E_1-E_0}{\hbar}t\Big). \qquad (\hbar \neq 1)$$

13 a)
$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle_{\psi(t)} = \frac{d}{dt}\langle\psi(t), A\psi(t)\rangle \overset{\psi(t)\equiv\psi}{=} \langle\dot\psi, A\psi\rangle + \langle\psi, A\dot\psi\rangle$$

$$\underset{\dot\psi = -\frac{i}{\hbar}H\psi}{=} \frac{i}{\hbar}\langle H\psi, A\psi\rangle - \frac{i}{\hbar}\langle\psi, AH\psi\rangle \underset{H=H^+}{=} \frac{i}{\hbar}\langle\psi, (HA-AH)\psi\rangle$$

$$= \Big\langle \frac{i}{\hbar}[H,A]\Big\rangle_{\psi(t)}$$

b) A Erhaltungsgröße $\Rightarrow$ $0 \overset{!}{=} \frac{d}{dt}\langle A\rangle_{\psi(t)}\Big|_{t=0} \overset{a)}{=} \Big\langle\frac{i}{\hbar}[H,A]\Big\rangle_{\psi(0)}$

für alle $\psi(0)\in\mathcal{H}$

$\Rightarrow [H,A] = 0$

$[H,A]=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\langle A\rangle_{\psi(t)} \overset{a)}{=} \Big\langle\frac{i}{\hbar}[H,A]\Big\rangle_{\psi(t)} = 0$, d.h.

$\langle A\rangle_{\psi(t)}$ konstant für alle Lsg. en $\psi(t)$

der S.-Gl., d.h. A Erhaltungsgröße

c)
$$\frac{d}{dt} A(x(t)) = \sum_i \frac{\partial A}{\partial q_i}(x(t)) \cdot \dot{q}_i(t) + \sum_i \frac{\partial A}{\partial p_i}(x(t))\, \dot{p}_i(t)$$

$$\underset{\text{Ham. Gl.en}}{\overset{=}{\uparrow}} \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i}(x(t)) \frac{\partial H}{\partial p_i}(x(t)) - \frac{\partial A}{\partial p_i}(x(t)) \frac{\partial H}{\partial q_i}(x(t)) \right)$$

$$= \{ H, A \}_{x(t)}$$

ebenso: A Erhaltungsgröße $\Longleftrightarrow$ $\{H, A\} = 0$.

14)
$$[\sigma_1, \sigma_2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = 2i\sigma_3$$

$$[\sigma_2, \sigma_3] = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = 2i\sigma_1$$

$$[\sigma_3, \sigma_1] = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2i\sigma_2 \; .$$

15)
$$\frac{d}{dt}\langle \mu_x \rangle_t \overset{13a)}{=} \Big\langle \frac{i}{\hbar} [\underbrace{-B\mu_B \sigma_3}_{H}, \underbrace{\mu_B \sigma_1}_{\mu_x}] \Big\rangle_t$$

$$= -\frac{B\mu_B^2}{\hbar} \langle i \underbrace{[\sigma_3, \sigma_1]}_{\overset{\shortparallel}{2i\sigma_2}} \rangle_t = \underbrace{\frac{2B\mu_B}{\hbar}}_{\omega} \langle \underbrace{\mu_B \sigma_2}_{\mu_y} \rangle_t$$

$$\frac{d}{dt}\langle \mu_y \rangle_t = -\frac{B\mu_B^2}{\hbar} \langle i \underbrace{[\sigma_3, \sigma_2]}_{\overset{\shortparallel}{-2i\sigma_1}} \rangle_t = -\omega \langle \underbrace{\mu_B \sigma_1}_{\mu_x} \rangle_t$$

$\frac{d}{dt}\langle \mu_z \rangle_t = 0$, da $[H, \mu_z] = 0$ und damit μ_z E.G.

b) mit $\psi(0) = e_{x+}$ ergeben sich für $t=0$ Anfangswerte $\langle \mu_x \rangle_0 = \mu_B$, $\langle \mu_y \rangle_0 = 0$, $\langle \mu_z \rangle_0 = 0$;

dazu passende Lsg. des DGL-Systems aus a) ist offenbar

$$\langle \mu_x \rangle_t = \mu_B \cos(\omega t)$$
$$\langle \mu_y \rangle_t = -\mu_B \sin(\omega t)$$
$$\langle \mu_z \rangle_t = 0 \; .$$