

Lösungshinweise Blatt 8

37 a)

$$H = \hat{p}^2 / 2m + U(x) ;$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{x} \rangle_t = \left\langle \frac{i}{\hbar} [H, \hat{x}] \right\rangle_t = \left\langle \frac{\hat{p}}{m} \frac{i}{\hbar} [\hat{p}, \hat{x}] \right\rangle_t = \frac{1}{m} \langle \hat{p} \rangle_t ;$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{p} \rangle_t = \left\langle \frac{i}{\hbar} [H, \hat{p}] \right\rangle_t = \left\langle U'(x) \frac{i}{\hbar} [\hat{x}, \hat{p}] \right\rangle_t = \langle -U'(x) \rangle_t = \langle F(x) \rangle_t$$

b) mit $F(x) = -kx$ folgt $m \frac{d^2}{dt^2} \langle \hat{x} \rangle_t = -k \langle \hat{x} \rangle_t ;$

d.h. $x(t) \equiv \langle \hat{x} \rangle_t$ genügt BWC $\ddot{x} = -\omega^2 x$ mit $\omega = \sqrt{k/m}$

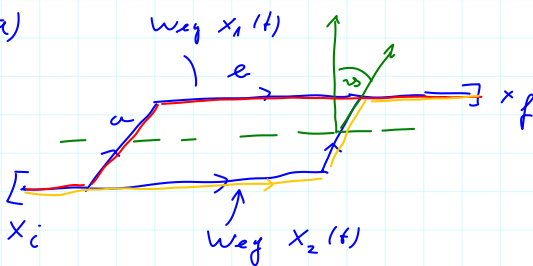
$\rightarrow$ Lsg. zu AWh $x(0) = \langle \hat{x} \rangle_0 = x_0$ und $\dot{x}(0) = \left. \frac{d}{dt} \langle \hat{x} \rangle_t \right|_{t=0} = \langle \hat{p} \rangle_0 / m = p_0 / m :$

$$\langle \hat{x} \rangle_t = x_0 \cos(\omega t) + \frac{p_0}{m\omega} \sin(\omega t) .$$

c) funktioniert nur, wenn $\langle F(x) \rangle_t = F(\langle \hat{x} \rangle_t) ;$

$\rightarrow F(x)$ muss lineare und damit $U(x)$ höchstens quadratische Funktion von x sein.

38 a)



$$h(\vec{x}) = \langle \vec{e}_3, \vec{x} \rangle$$

$$L = \frac{m}{2} |\dot{\vec{x}}|^2 - mg h(\vec{x})$$

$\uparrow$
Gravitations p.k.

$$P(\gamma) \propto |K(x_f, x_i, T)|^2$$

$\uparrow$
Laufzeit des Teilchens durch Tunnelform.

$$\begin{aligned} K(x_f, x_i, T) &= 2 \left(e^{iS[x_1]/\hbar} + e^{iS[x_2]/\hbar} \right) \\ &= \tilde{2} \left(e^{i\Delta S/\hbar} + 1 \right) \end{aligned}$$

mit $\Delta S = S[x_1] - S[x_2] \stackrel{\text{bzw.}}{=} - \int_0^b mg a \cos \gamma \, dt$

$$= - \frac{mgab}{\omega} \cos \gamma$$

$$\rightarrow P(\vartheta) \propto \left| e^{i\frac{\Delta S}{2t}} + e^{-i\frac{\Delta S}{2t}} \right|^2 = \cos^2 \left(\frac{mgab}{2\hbar t} \cos \vartheta \right)$$

b) Anzahl Maxima für $\vartheta \in [0, \pi/2]$:

$$N = \left\lfloor \frac{1}{\pi} \frac{mgab}{2\hbar t} \right\rfloor \approx \lfloor 6,15 \rfloor = 6$$