

Lösungshinweise Blatt 9

$$40. a) \quad \left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\hat{x}}{l} + i \frac{\hat{p}}{\hbar} \right) \\ a^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\hat{x}}{l} - i \frac{\hat{p}}{\hbar} \right) \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} \frac{\hat{x}}{l} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a^\dagger + a) \\ \frac{\hat{p}}{\hbar} &= \frac{i}{\sqrt{2}} (a^\dagger - a) \end{aligned}$$

$$b) \quad \langle \hat{x} \rangle_n = \frac{l}{\sqrt{2}} \langle a^\dagger + a \rangle_n = \frac{l}{\sqrt{2}} (\langle n | a^\dagger | n \rangle + \langle n | a | n \rangle) = 0$$

$$\langle \hat{p} \rangle_n = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}l} \langle a^\dagger - a \rangle_n = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}l} (\langle n | a^\dagger | n \rangle - \langle n | a | n \rangle) = 0$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}^2 \rangle_n &= \frac{l^2}{2} \langle (a^\dagger + a)^2 \rangle_n = \frac{l^2}{2} \langle a^\dagger a + a a^\dagger \rangle_n = l^2 \langle \hat{n} + \frac{1}{2} \rangle_n \\ (1) \quad &= (n + \frac{1}{2}) l^2 \end{aligned}$$

$\underbrace{[a, a^\dagger] + a^\dagger a}_{=1}$

$$(2) \quad \langle \hat{p}^2 \rangle_n = -\frac{\hbar^2}{2l^2} \langle (a^\dagger - a)^2 \rangle_n = \frac{\hbar^2}{2l^2} \langle a^\dagger a + a^\dagger a \rangle = \frac{\hbar^2}{l^2} (n + \frac{1}{2})$$

check: $E_n = \langle H \rangle_n = \frac{1}{2m} \langle p^2 \rangle_n + \frac{m\omega^2}{2} \langle x^2 \rangle_n$

$$= \left(\frac{1}{2m} \frac{\hbar^2}{l^2} + \frac{m\omega^2}{2} l^2 \right) (n + \frac{1}{2})$$

(1) (2)

$$= \left(\frac{\hbar^2 \omega}{2} + \frac{\hbar^2 \omega}{2} \right) (n + \frac{1}{2}) = \hbar \omega (n + \frac{1}{2}) \quad \checkmark$$

$\uparrow$
 $l^2 = \hbar / m \omega$

$$\begin{aligned} c) \quad \langle n | \hat{x} | m \rangle &= \frac{l}{\sqrt{2}} \langle n | a^\dagger + a | m \rangle \\ &= \frac{l}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{m+1} \langle n | m+1 \rangle + \sqrt{m} \langle n | m-1 \rangle \right) \\ &= \frac{l}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{m+1} \delta_{n, m+1} + \sqrt{m} \delta_{n, m-1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle n | \hat{x}^2 | m \rangle &= \frac{l^2}{2} \langle n | (a^\dagger + a)^2 | m \rangle \\ &= \frac{l^2}{2} \langle n | a^{\dagger 2} + a^2 + a^\dagger a + a a^\dagger | m \rangle \\ &= \frac{l^2}{2} \left(\sqrt{m+2} \sqrt{m+1} \langle n | m+2 \rangle + \sqrt{m} \sqrt{m-1} \langle n | m-2 \rangle \right) \\ &= \frac{l^2}{2} \left(\sqrt{m+2} \sqrt{m+1} \delta_{n, m+2} + \sqrt{m} \sqrt{m-1} \delta_{n, m-2} \right) \end{aligned}$$

$$41a) \quad \text{rot } \vec{A} = B \text{ rot}(x_1 \vec{e}_2) = B \vec{e}_3 = \vec{B} \quad \checkmark$$

$$b) \quad \text{mit } \vec{A} = B x_1 \vec{e}_2 \text{ ist}$$

$$H = \frac{1}{2m} (\hat{p}_1^2 + (\hat{p}_2 - q B x_1)^2 + p_3^2)$$

$$\text{in Ortsdarstellung: } H = \frac{1}{2m} \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_2} - q B x_1)^2 - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right)$$

$$\rightarrow H \psi_{l_2, l_3}(\vec{x}) = \frac{1}{2m} \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + (\hbar l_2 - q B x_1)^2 + \hbar^2 l_3^2 \right) \psi_{l_2, l_3}(\vec{x})$$

$$\text{Stab. S.G.} \quad E \psi_{l_2, l_3}(\vec{x}) = H \psi_{l_2, l_3}(\vec{x}) \quad \text{damit äquivalent}$$

$$\stackrel{zm}{=} \left(E - \frac{\hbar^2 l_3^2}{2m} \right) \phi(x_1) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{q^2 B^2}{2m} \left(x_1 - \frac{\hbar l_2}{q B} \right)^2 \right) \phi(x_1)$$

$$\text{mit } \tilde{E} = E - \frac{\hbar^2 l_3^2}{2m}, \quad \omega = \frac{q B}{m}, \quad x = x_1, \quad X_{l_2} = \hbar l_2 / q B$$

erhalten wir stab. S. Gl.

$$\tilde{E} \phi(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m \omega^2}{2} (x - X_{l_2})^2 \right) \phi(x)$$

$$\hat{=} \text{stab. S. Gl. eines harmonischen Osz. sein}$$

$$\text{Frequenz } \omega \text{ und Potenzialminimum bei } x = X_{l_2}$$

$$\rightarrow \text{Eigenenergien: } E_{n, l_2, l_3} = \tilde{E}_n + \frac{\hbar^2 l_3^2}{2m} = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 l_3^2}{2m},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L \in \mathbb{R} \\ L \in \mathbb{N} \\ L \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{array} \right. \quad \text{unabhängig von } l_2!$$

$$\text{Eigenzustände: } \psi_{n, l_2, l_3}(\vec{x}) = \phi_n(x_1 - X_{l_2}) e^{i l_2 x_2} e^{i l_3 x_3}$$

↑

Oszillator-Eigenzustand,

verschoben um X_{l_2}

42 a)

$$\frac{d}{d\lambda} f(\lambda) = \underbrace{A e^{\lambda A} B e^{-\lambda A}}_{f(\lambda)} - \underbrace{e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} A}_{f(\lambda)}$$

$$= [A, f(\lambda)] = \underbrace{[A, \dots]}_{\text{lin. Operator auf VR der Operatoren } \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}} f(\lambda)$$

lin. Operator auf VR

der Operatoren $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$

$$\rightarrow f(\lambda) = e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} \text{ ist spez. Lsg da DGL}$$

$$\frac{d}{d\lambda} f = [A, \dots] f \quad (*)$$

$$\text{zum A.W. } f(0) = e^{0A} B e^{-0A} = B ;$$

DGL (*) von Typ „ $y' = ay$ “ $\rightarrow$ Lsg. zum A.W

$f(0) = B$ ist auch geg. werd

$$f(\lambda) = e^{[A, \dots]\lambda} B \quad ; \quad (1)$$

$$\text{für } \lambda=1 \text{ ist dann nach (1) } f(1) = e^{[A, \dots]} B ,$$

$$\text{andereits nach Def. } f(1) = e^A B e^{-A} ,$$

also

$$\begin{aligned} e^A B e^{-A} &= e^{[A, \dots]} B = (1 + [A, \dots] + \frac{1}{2} [A, [A, \dots]] + \dots) B \\ &= B + [A, B] + \frac{1}{2} [A, [A, B]] + \frac{1}{3!} [\dots] + \dots \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} g(\lambda) &= A e^{\lambda A} e^{\lambda B} + e^{\lambda A} B e^{\lambda B} \\ &= A e^{\lambda A} e^{\lambda B} + \underbrace{e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} e^{\lambda A} e^{\lambda B}} \end{aligned}$$

$$\stackrel{a)}{=} B + [A, B]\lambda + \frac{1}{2} [A, [A, B]]\lambda^2 + \dots$$

$$\stackrel{!}{=} 0 ,$$

da A mit $[A, B]$ vertauscht n.V.

$$\text{a.h. } \frac{d}{d\lambda} g(\lambda) = (A + B + [A, B]\lambda) \underbrace{e^{\lambda A} e^{\lambda B}}_{= g(\lambda)}$$

also gemäß $g(\lambda) = e^{\lambda A} e^{\lambda B}$ die DGL

$$\frac{d}{d\lambda} g = (A+B + [A,B]\lambda) g \quad (*)$$

zum A.W. $g(0) = e^{0A} e^{0B} = \mathbb{1}$;

spezielle Lsg der DGL (*) zum A.W. $g(0) = \mathbb{1}$ ist
auch geg. durch

$$\tilde{g}(\lambda) = e^{(A+B)\lambda + \frac{1}{2}[A,B]\lambda^2}$$

┌ denn $\tilde{g}(0) = e^0 = \mathbb{1}$; zudem noch von $[A+B, [A,B]] = 0$
und somit $\tilde{g}(\lambda) = e^{(A+B)\lambda} e^{\frac{1}{2}[A,B]\lambda^2}$

$$\begin{aligned} \leadsto \frac{d}{d\lambda} \tilde{g}(\lambda) &= (A+B) e^{(A+B)\lambda} e^{\frac{1}{2}[A,B]\lambda^2} + e^{(A+B)\lambda} [A,B]\lambda e^{(A+B)\lambda} \\ &= (A+B + [A,B]\lambda) e^{(A+B)\lambda} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad [A+B, [A,B]] = 0 \end{aligned}$$

✓

└

$g(\lambda) \stackrel{!}{=} \tilde{g}(\lambda)$ für $\lambda = 1$ impliziert

$$e^A e^B = g(1) = \tilde{g}(1) = e^{A+B + \frac{1}{2}[A,B]}$$

■