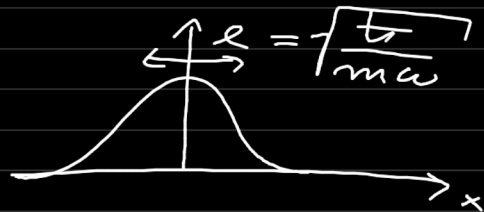


Harmon. Osz.: $H = \hat{p}^2/2m + \frac{m\omega^2}{2} \hat{x}^2$

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad : \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\hookrightarrow \phi_0(x) = \frac{e^{-x^2/2\ell^2}}{(\pi\ell^2)^{1/4}}$$



$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \left(\frac{x}{\ell} - \ell \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_{n-1}(x)$$

Leitoperatoren: $a, a^\dagger$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\hat{x}}{\ell} + i\ell \frac{\hat{p}}{\hbar} \right)$$

$$\hookrightarrow a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\hat{x}}{\ell} - i\ell \frac{\hat{p}}{\hbar} \right)$$

$$[a, a^\dagger] = 1$$

$$\hat{x}, \hat{p} \rightarrow H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)$$

$$\langle x | \phi_n \rangle = \phi_n(x), \quad |n\rangle := |\phi_n\rangle$$

$$\rightarrow \bullet a^+ |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$$

↑
Erzeugung eines Schwingungsquantums
 /-teilchen

(Phonon, Photon)

a^+ = Schwingungsquantum / Teilchen-
Erzeugung

$$\bullet a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$$

↑
Vernichtung eines S.-Q.
 / Teilchen

a = S.Q. / Teilchen-Vernichtung



- $\hat{N} = a^\dagger a$: Teilchenzahl-Op.

$$\begin{aligned}\hat{N}|n\rangle &= a^\dagger a |n\rangle = a^\dagger \sqrt{n} |n-1\rangle \\ &= \underline{n} |n\rangle\end{aligned}$$

$$a, a^\dagger \rightarrow \frac{\hat{x}}{l} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a^\dagger + a)$$

$$\frac{i\hat{p}}{\hbar} = \frac{i}{\sqrt{2}} (a^\dagger - a)$$

$$\rightarrow \langle \hat{x} \rangle_n, \langle \hat{x}^2 \rangle_n, \langle \hat{p} \rangle_n, \langle \hat{p}^2 \rangle_n, \dots$$

Quantenmechanische Drehimpuls

→ Rotationen

räumliche Rotation

$$\vec{x} \mapsto \vec{x}' = R \vec{x}$$

Drehmatrix:

$$R R^T = 1, \det R = 1$$

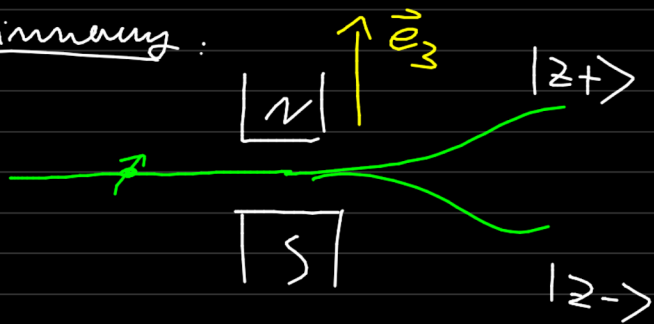
$$R \in SO_3$$

Transformation der Zustände eines
g. m. Systems:

$$|\psi\rangle \longrightarrow |\psi'\rangle = ??$$

zuerst am Bsp. eines Spins ($\hat{=}$ mag. Mom.)

Erinnerung:



$$\mathcal{H} = \text{Span}\left\{ \underset{\substack{\uparrow \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}{|z+\rangle}, \underset{\substack{\uparrow \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}{|z-\rangle} \right\} = \mathbb{C}^2$$



$$\rightarrow |x\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z+\rangle \pm |z-\rangle)$$

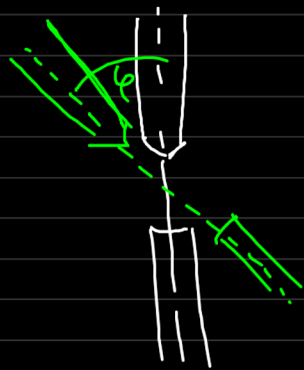
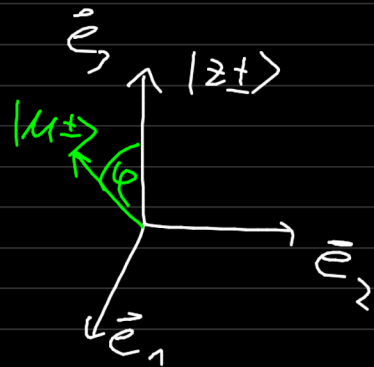
$$\rightarrow |y\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z+\rangle \pm i |z-\rangle)$$

Frage:



Wie laute Zustände
die bzgl. einer bel.
Richtung $\vec{n}$ positiv
/ negativ polarisiert
sind?

Speziell:



$R_2(\varphi)$: Rotation um Achse $\vec{e}_2$,
Drehwinkel φ

$$|z\pm\rangle \longrightarrow |n\pm\rangle = ?$$

allg.: räum. Rotation: $\vec{x} \mapsto \vec{x}' = R \vec{x}$

$\hookrightarrow$ unit. Trafo: $|\psi\rangle \mapsto |\psi'\rangle$
 $= U(R) |\psi\rangle$

$$\begin{array}{ccc}
 R & \overset{?}{\longleftrightarrow} & U(R) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 R: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 & & U(R): \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \\
 & & \text{Spin: } \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2
 \end{array}$$

Eigenschaften der Abb: $R \mapsto U(R)$:

$$\begin{aligned}
 U(1_3) &\stackrel{!}{=} 1_{\mathcal{H}} \\
 U(R R') &\stackrel{!}{=} U(R) U(R')
 \end{aligned}$$

$$SO_3 \longrightarrow SU(2)$$

d.h. $h: R \mapsto U(R)$
 ist ein Gruppenhomomorphismus

Math: Eigenschaften von SO_3
 und $\dim \mathcal{H}$ legen
 Abb. h eindeutig fest!

g.k. Impuls:

Translationen:
im $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{x} \longmapsto \vec{x} + \vec{s}$$

↪ unitären Trafo $T(\vec{s}): \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$

$$|\vec{x}\rangle \mapsto |\vec{x} + \vec{s}\rangle$$

→ Gruppenhomomorph: $h: \mathbb{R}^3 \longrightarrow SU(\mathcal{H})$

$$\vec{s} \mapsto T(\vec{s})$$

$$\rightarrow \bullet T(\vec{0}) = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$$

$$\bullet T(\vec{s} + \vec{s}') = T(\vec{s}) T(\vec{s}')$$

→ Impuls als Gen. der Trans.

$$p_x := -i\hbar \left. \frac{\partial T(\vec{s})}{\partial s_x} \right|_{\vec{s}=0} \dots$$

speziell für Rotation $R_2(\varphi)$
eines Spins um $\vec{e}_2$, um φ :

$$U_2(\varphi) \stackrel{!}{=} U(R_2(\varphi))$$

$$\rightarrow \bullet U_2(0) = \mathbb{1}_2$$

$$\bullet U_2(\varphi + \varphi') \stackrel{*}{=} U_2(\varphi) U_2(\varphi')$$

$$\frac{d}{d\varphi} U_2(\varphi_0) = \frac{d}{d\varphi} U_2(\varphi + \varphi_0) \Big|_{\varphi=0}$$

$$= \frac{d}{d\varphi} (U_2(\varphi) U_2(\varphi_0)) \Big|_{\varphi=0}$$

$$= \underbrace{\frac{dU_2(\varphi)}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0}}_{\uparrow} \cdot \underline{U_2(\varphi_0)}$$

Operator, unabhängig von φ_0 !

d.h.

$$\boxed{\frac{dU_2(\varphi)}{d\varphi} = J U_2(\varphi)}$$

$$\text{mit } J_2 := \frac{dU_2(0)}{d\varphi} \quad (*)$$

[lin., hom. DGL, 1. Ord., konst. Fktkoeff.]

$$y' = ay \rightarrow y(x) = e^{ax}$$

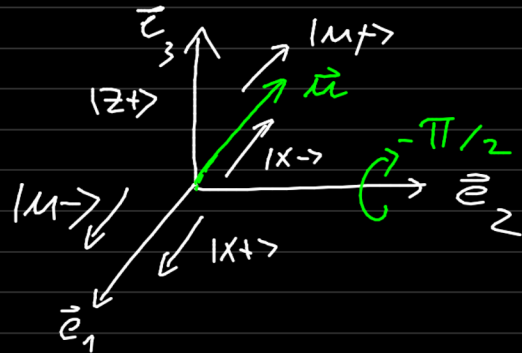
Lsg zum AW 1
bei $x=0$

$\rightarrow U_2(\varphi)$ ist spez. Lsg.
 von $\mathbb{R}$ zum AW $U_2(\varphi) = \mathbb{1}_2$:

$$U_2(\varphi) = e^{iJ_2\varphi}$$

$$\underline{J_2 = ?}$$

hier: betrachte Rotation $R_2(-\frac{\pi}{2})$:



$$\rightarrow |1x-> \stackrel{!}{=} |1+> = U_2(-\frac{\pi}{2}) |2+>$$

$$|1x+> = |1-> = U_2(-\frac{\pi}{2}) |2-> !$$

$$U_2(-\pi/2) |z+\rangle = |x-\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$U_2(-\pi/2) |z-\rangle = |x+\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow U_2(-\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(\pi/4) = \sin(\pi/4)$

und $e^{i \sigma_j \varphi} = (\cos \varphi) \mathbb{1}_2 + i(\sin \varphi) \sigma_j$
(Aufgabe 5)

σ_2

$\parallel$

$$U_2(-\pi/2) = e^{+i \sigma_z \frac{\pi}{4}}$$

$$= \cos(\pi/4) \mathbb{1} + i \sin \frac{\pi}{4} \sigma_2$$

$$= e^{-i \sigma_2 \pi/2}$$

$$\rightarrow \boxed{J_2 = -i \frac{\sigma_2}{2}}$$

$$\rightarrow \boxed{U_2(\varphi) = e^{-i \frac{\sigma_2}{2} \varphi}$$

$$= \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \mathbb{1}_2 - i \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sigma_2$$

$$\underline{\underline{\varphi=2\pi}}: U_2(2\pi) = \cos\pi \cdot \mathbb{1}_2 = \textcircled{-} \mathbb{1}_2 !$$

?!

$$\rightarrow \text{analog: } J_1 = -i \frac{\sigma_1}{2}$$

$$J_3 = -i \frac{\sigma_3}{2}$$

$$J_x = -i \frac{\sigma_x}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{U_x(\varphi) = e^{-i \frac{\sigma_x}{2} \varphi} !$$

allg. Drehachse: $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$
Drehwinkel: φ

$$U_{\vec{n}}(\varphi) = \exp\left(-i \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\sigma_1 n_1 + \sigma_2 n_2 + \sigma_3 n_3 !$$

(norm? $\rightarrow$ Mantas!)