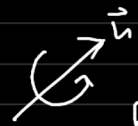


Wdhlg: Rotation von Spinzuständen

$$SO_3 \ni R$$



$$R_n(\varphi) \xrightarrow{h} U_n(\varphi) = U(R_n(\varphi)) = ?$$

$$U(R)|z\pm\rangle = ?$$

$$\mathcal{H} = \text{Span}\{|z+\rangle, |z-\rangle\}$$

-
- $U(\mathbb{1}_3) \stackrel{!}{=} \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$!
 - $U(R'R) \stackrel{!}{=} U(R)U(R)$

→ Transf. h im wesent.
bestimmt!

$$\begin{aligned} \vdots \\ \rightarrow U_e(\varphi) &= U(R_e(\varphi)) \stackrel{!}{=} e^{-i\sigma_z \frac{\varphi}{2}} \\ &= \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \mathbb{1}_2 - i \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sigma_z \end{aligned}$$

$$\rightarrow U(2\pi) = \ominus \mathbb{1}_2$$

$$\begin{aligned} U(4\pi) &= \cos(2\pi) \mathbb{1} - i \overbrace{\sin(2\pi)}^{=0} \sigma_z \\ &= +\mathbb{1}_2 \end{aligned}$$

Drehung um 2π ~~$\neq$~~ Drehung um 4π
 (auch klassisch: $\checkmark$)

nach zu behandeln:

$$1) U_{\vec{n}}(\varphi) := U(R_{\vec{n}}(\varphi)) = e^{-i \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{n}}{2} \varphi}$$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \sum_{\ell=1}^3 \sigma_{\ell} n_{\ell} = \sigma_1 n_1 + \sigma_2 n_2 + \sigma_3 n_3$$

wann?

2) Rotation eines Teilchenzustands

$$|\psi\rangle \xrightarrow{R \in SO_3} U(R)|\psi\rangle = |\psi\rangle$$

$\cong$
 unitäre Op.
 auf $\mathcal{H} = \text{span}\{|\vec{x}\rangle\}$
 $\cong$

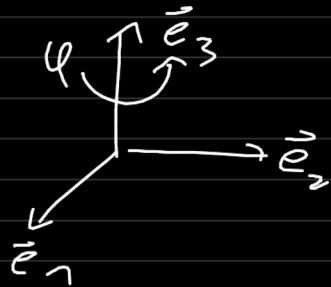
3) Drehimpuls-Operatoren:

$\rightarrow$ Eigenwerte, -zustände!

$\rightarrow$ Kugelflächenfkt.

4) Trilchen im Zentralpotential
 ($\rightarrow$ Elektron im H-Atom)

Struktur der Drehgruppe SO_3



$SO_3 =$ Menge der 3×3 orthog. Mat. : $R \in SO_3$: $R^T R = \mathbb{1}_3$, $\det R = 1$
 mit Det. 1
 Gruppenverh. $\equiv$ Multiplikation

$$R_3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ +\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet R_3(\varphi_1 + \varphi_2) = R_3(\varphi_1) R_3(\varphi_2)$$

$$\begin{aligned} \frac{dR_3(\varphi_0)}{d\varphi} &= \left. \frac{d}{d\varphi} R_3(\varphi + \varphi_0) \right|_{\varphi=0} \\ &= \left[\left. \frac{d}{d\varphi} R_3(\varphi) \right|_{\varphi=0} \cdot R_3(\varphi_0) \right]_{\varphi=0} = \mathbb{J}_3 \end{aligned}$$

$$\text{d.h. } \frac{d}{d\varphi} R_3 = J_3 R_3$$

$$\text{und } R_3(0) = \mathbb{1}_3 \quad (\dot{\gamma} = \alpha \gamma)$$

$$\rightarrow R_3(\varphi) = e^{J_3 \varphi}$$

$$\text{mit } J_3 = \frac{d}{d\varphi} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ +\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bigg|_{\varphi=0}$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{analog: } R_1(\varphi) = e^{J_1 \varphi}$$

$$\text{mit } J_1 = \frac{d}{d\varphi} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & +\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \bigg|_0$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2(\varphi) = e^{J_2 \varphi}$$

$$\text{mit } J_2 = \frac{d}{d\varphi} \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \bigg|_{\varphi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rotationen um verschiedene Achsen Vertauschen nicht!

Drehungen um kleine Winkel $\Delta\varphi$

Baker - Campbell - Hausdorff:

$$* \left[e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}[A, [A,B]] + \frac{1}{12}[B, [B,A]] + \dots} \right]$$

$$R = R_1(\Delta\varphi) R_2(\Delta\varphi)$$

$$= e^{\mathcal{J}_1 \Delta\varphi} e^{\mathcal{J}_2 \Delta\varphi}$$

$$* = e^{\underbrace{\mathcal{J}_1 \Delta\varphi + \mathcal{J}_2 \Delta\varphi}_{\text{yellow}} + \underbrace{\frac{1}{2}[\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2] \Delta\varphi^2}_{\text{green}} + \dots}$$

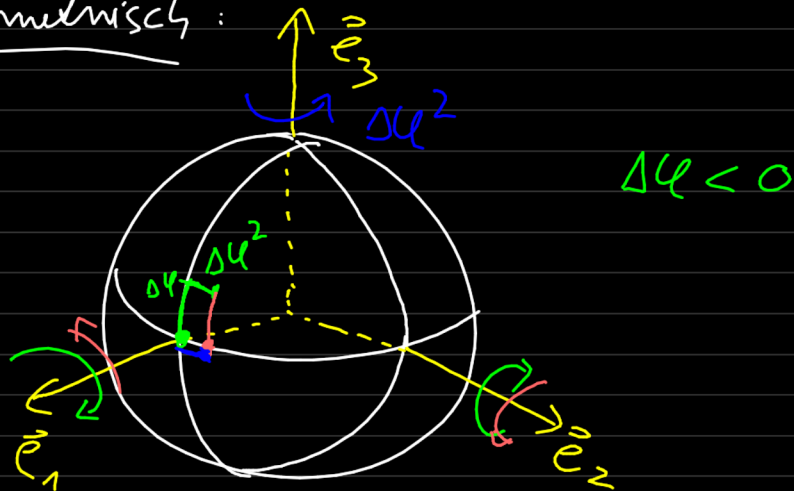
$$R' = R_1(-\Delta\varphi) R_2(-\Delta\varphi)$$

$$= e^{-\mathcal{J}_1 \Delta\varphi} e^{-\mathcal{J}_2 \Delta\varphi}$$

$$* = e^{\underbrace{-\mathcal{J}_1 \Delta\varphi - \mathcal{J}_2 \Delta\varphi}_{\text{yellow}} + \underbrace{\frac{1}{2}[\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2] \Delta\varphi^2}_{\text{green}} + \dots}$$

$$R^T R = e^{[\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2] \Delta \varphi^2 + \dots} !$$

geometrisch:



$$[\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \dots$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ominus \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \underline{\underline{\mathcal{J}_3}} !$$

analog: $[\mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3] = \mathcal{J}_1$

$$[\mathcal{J}_3, \mathcal{J}_1] = \mathcal{J}_2$$

SO_3 abgeschlossen unter

Multiplikation: $R, R' \in SO_3$
 $\Rightarrow RR' \in SO_3$

$\Rightarrow$ Erzeuger der Elemente aus SO_3
sind abgeschlossen unter
Kommutatorbildung:

J, J' Gener. $\Rightarrow [J, J']$ Gener.

$SO_3 =$ Gruppe zugeh. Mannigfch.
 $\Rightarrow$ Lie-Gruppe

$so_3 =$ Vektorraum aller Generatoren
der Elemente aus SO_3
und Kommutatorbildung.

$R \equiv e^J$

Lie-Gruppe G (z.B. SO_3)

$\hookrightarrow$ Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ($\rightarrow$ Menge der Gen.
 $\vec{J} \dots$)

$$a) \vec{J}, \vec{J}' \in \mathfrak{g} \Rightarrow [\vec{J}, \vec{J}'] \in \mathfrak{g}$$

$$b) \vec{J}, \vec{J}' \in \mathfrak{g} \Rightarrow \alpha \vec{J} + \beta \vec{J}' \in \mathfrak{g}$$

z.B.: $e^{-\vec{J}_x} e^{-\vec{J}_x} e^{\vec{J}_x} e^{\vec{J}_x} \stackrel{!}{=} e^{\vec{J}_z}$

BCH $\hookrightarrow e^{[\vec{J}_1, \vec{J}_2] \alpha^2} = e^{\vec{J}_z}$

$$c) e^{\alpha \vec{J} + \beta \vec{J}'} \stackrel{\text{BCH}}{=} e^{\alpha \vec{J}} e^{\beta \vec{J}'} e^{-\frac{1}{2} \underbrace{[\vec{J}_1, \vec{J}_2]}_{\vec{J}} \alpha \beta}$$

$$\alpha, \beta \ll 1 \quad = e^{\vec{J}} !$$

$\rightarrow \alpha \vec{J} + \beta \vec{J}$ auch in $\mathfrak{g}$!

Anwendung: SO_3

$$SO_3 \ni \vec{J}_1, \vec{J}_2, \vec{J}_3$$

$$\rightarrow \vec{n} \cdot \vec{J} = n_1 \vec{J}_1 + n_2 \vec{J}_2 + n_3 \vec{J}_3 \in SO_3$$

$$\rightarrow R_{\vec{n}}(\varphi) := e^{\vec{j} \cdot \vec{n} \cdot \varphi} = ?$$

$$\vec{n} \in \mathbb{R}^3$$

$$|\vec{n}| = 1$$

$$\frac{dR_{\vec{n}}(0)}{d\varphi} = \vec{j} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$R_{\vec{n}}(0\varphi) = \mathbb{1}_3 + \vec{j} \cdot \vec{n} \Delta\varphi$$

$$\rightarrow R_{\vec{n}}(\Delta\varphi) \vec{x} - \vec{x} = (\vec{j} \cdot \vec{n}) \vec{x} = \begin{pmatrix} n_2 x_3 - n_3 x_2 \\ n_3 x_1 - n_1 x_3 \\ n_1 x_2 - n_2 x_1 \end{pmatrix} = \vec{n} \times \vec{x}$$



$$(\vec{n} \times \vec{x}) \Delta\varphi$$

$$= (\vec{n} \times \vec{x}_{\perp}) \Delta\varphi$$

$$= |\vec{x}_{\perp}| \cdot \Delta\varphi \cdot \widehat{(\vec{n} \times \vec{x}_{\perp})}$$

d.h. $R_{\vec{n}}(\varphi)$ Drehung um
Achse $\vec{n}$,
Drehwinkel φ ✓



$$R_{\vec{n}}(\varphi) \stackrel{!}{=} e^{\vec{J} \cdot \vec{n} \varphi}$$

$$\rightarrow U_{\vec{n}}(\varphi) = U(e^{\vec{J} \cdot \vec{n} \varphi})$$

$$\stackrel{!}{=} e^{-i \frac{\varphi}{2} \frac{\vec{J} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}} \varphi$$

Darstellungstheorem:

Lie-Gruppen G, H ; $so_3 \rightarrow su_2$

$$\text{Abb.: } \rho_f: G \longrightarrow H$$

$$X = e^{\vec{\alpha}} \mapsto \rho_f(X) = e^{f(\vec{\alpha})}$$

Gruppenhomomorphismus

$\Leftrightarrow$

die Abb $\vec{\alpha} \mapsto f(\vec{\alpha})$

erhält die Kommutatorrelationen:

$$(*) \quad [f(\vec{\alpha}), f(\vec{\alpha}')] \stackrel{!}{=} f([\vec{\alpha}, \vec{\alpha}'])$$

Anmerkung:

$$U: SO_3 \rightarrow SU_2$$

$$\varrho^{\vec{\tau}} \mapsto e^{i\varphi(\vec{\tau})} =: U(\varrho^{\vec{\tau}})$$

$$\text{mit } f(\vec{\tau}_\ell) = -i \frac{\sigma_\ell}{2} !$$

$$\rightarrow [f(\vec{\tau}_1), f(\vec{\tau}_2)] = \frac{-1}{4} \underbrace{[\sigma_1, \sigma_2]}$$

$$= -i \frac{\sigma_3}{2} = f(\vec{\tau}_3) = f([\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2]) \quad \text{!}$$

d.h. U Gruppenhom.

insb.

$$U_{\vec{n}}(\varphi) = U(R_{\vec{n}}(\varphi))$$

$$= U(e^{\vec{n} \cdot \vec{\tau} \varphi})$$

$$= e^{\underbrace{f(\vec{n} \cdot \vec{\tau}) \cdot \varphi}_{\underline{= -i \frac{\vec{n} \cdot \vec{\sigma}}{2}}}} = e^{-i \frac{\vec{n} \cdot \vec{\sigma}}{2} \varphi} !$$