

1. Postulat

Zustandsraum $\hat{=}$ unitärer
Vektorraum $\mathcal{H}$
("Hilbertraum")

Zustand $\hat{=}$ normierter Vektor
 $\varphi \in \mathcal{H}$

→ d.h. $\mathcal{H}$ komplexer VR
mit hermitesche Skalarprodukt:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$$

- $\langle \varphi, \psi \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle^*$
- $\langle \varphi, \varphi \rangle > 0 \quad \varphi \neq 0$
- $\langle \varphi, \psi_1 + \psi_2 \rangle = \langle \varphi, \psi_1 \rangle + \langle \varphi, \psi_2 \rangle$
 $\langle \varphi, \lambda \psi \rangle = \lambda \langle \varphi, \psi \rangle =$
 $\langle \lambda^* \varphi, \psi \rangle$

→ Norm: $\|\varphi\| := \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle}$

Orthogonalität

$\varphi \perp \psi \Leftrightarrow \langle \varphi, \psi \rangle = 0$
(von Vekt./Zuständen)

$$\varphi_{L+R} = \frac{\varphi_L + \varphi_R}{\|\varphi_L + \varphi_R\|}$$

Beispiel:

zust. (L) $\hat{=}$ $\varphi_L \in \mathcal{H}$, $\|\varphi_L\| = 1$

zust. (R) $\hat{=}$ $\varphi_R \in \mathcal{H}$, $\|\varphi_R\| = 1$

↓ Vektoraddition!

zust. (L+R) $\hat{=}$ $\frac{\varphi_L + \varphi_R}{\|\varphi_L + \varphi_R\|}$

← normierter Vektor

allg:
$$\psi = \frac{\alpha \varphi_L + \beta \varphi_R}{\|\alpha \varphi_L + \beta \varphi_R\|}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

erreicht: mathemat. Definition
 von Überlagerungen, " $(L+R)$ "
 $\downarrow$
 φ_{L+R}

offen: physikalische
 Bedeutung des
 Zustands $\varphi_{L+R} \in \mathcal{H}$
 $?$

2) Notwendigkeit von Messgrößen und Messungen

banalen Feststellung: direkte Beobachtung eines mikroskopischen Systems ist unmöglich!

(~1900: E. Mach "Haben Sie schon mal ein Atom gesehen?" ^{"BR. NH"} _{Mach})

→ grundsätzliches Problem

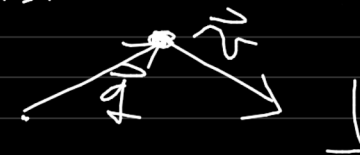
→: physikalische Bedeutung der theoretischen Konstrukte!

("Was genau ist die phys. Bedeutung des Zust. ψ_{L+R} ?")

hL. Mech. Zust.:

$$x = (\vec{q}, \vec{p})$$

_{"mp"}



einfache Lösung: Operationalismus

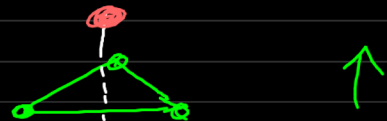
→ Theorie beschränke sich auf Aussagen über unsere

Operationen am System,
keine Aussagen über das
System "an sich"!

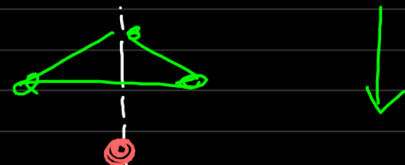
→ in der QM: Messungen und
Präparationen von Systemen

Beispiel: NH_3 -Molekül.

Zust. (L) $\hat{=} \varphi_L$

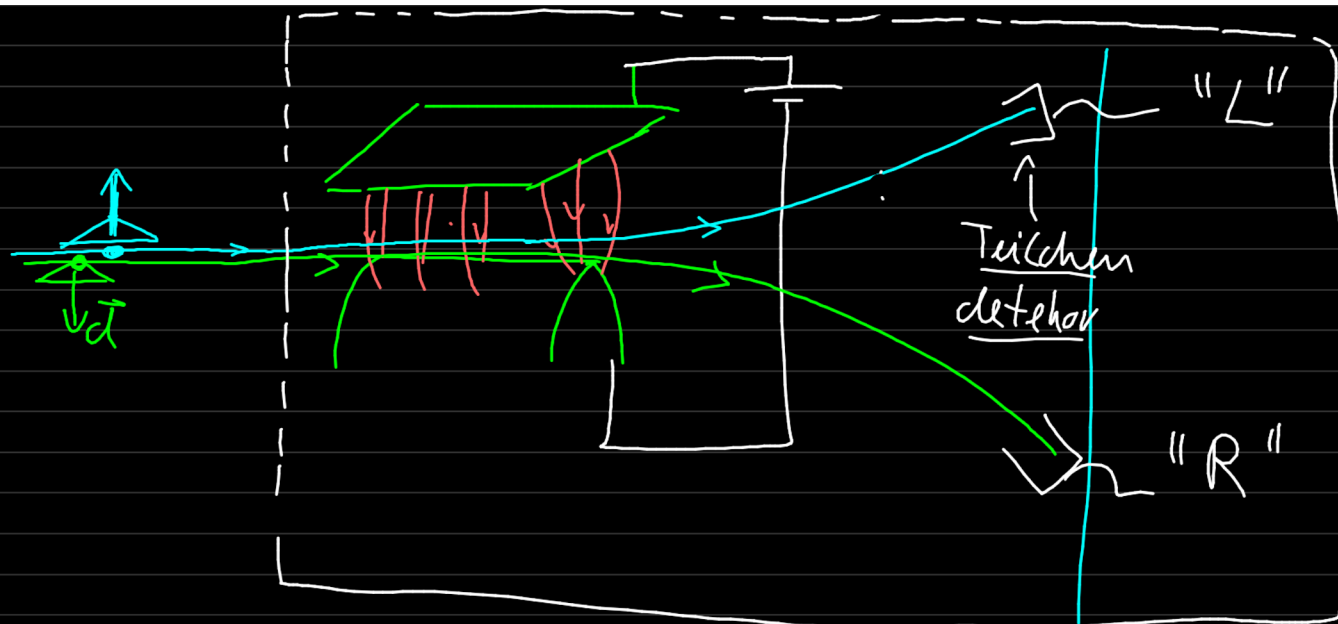


Zust. (R) $= \varphi_R$



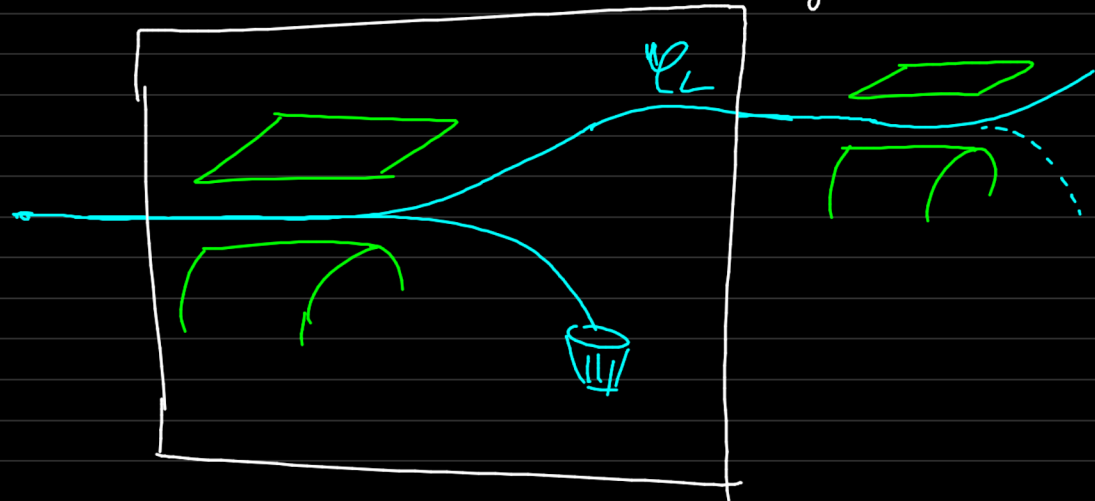
benötigen Messgerät zur
Zustandsbestimmung!
mittels elekt. Dipolmoment!

$$\vec{d} = q \cdot a \cdot \hat{n}$$



← Messgerät zur
Best. des Zustands
L oder R !

Messgerät zugleich Präparations-
gerät:



Was geschieht bei Messung
von NH_3 im Zustand ψ_{L+R} ?

→ Experimente!

Theorie (=QM): ?

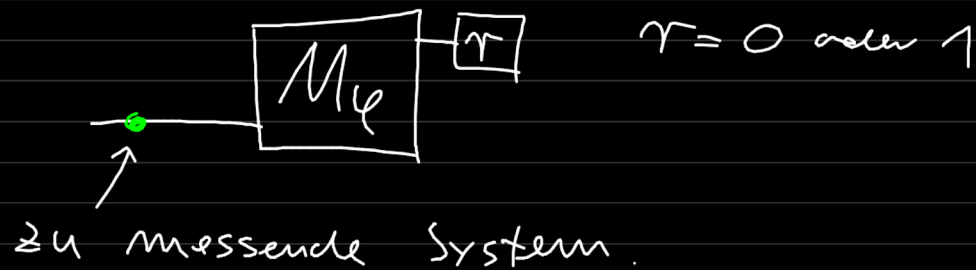
→ 2. Postulat (Messpostulat,
element. Version)

(2.1) Zu jedem Zustand $\psi \in \mathcal{H}$
gibt es ein Messgerät/Messung

M_φ mit zwei möglichen Ergebnissen.

$1 \hat{=}$ "positiv" = "Zust. φ liegt vor"

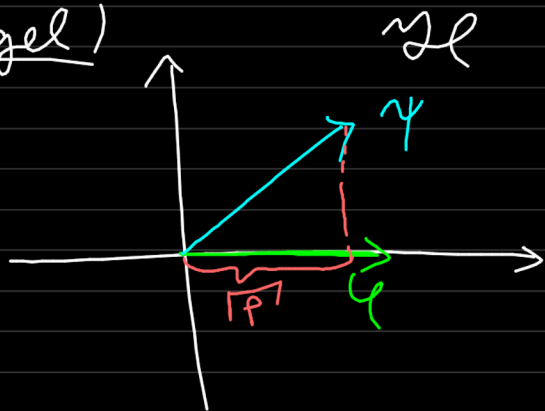
$0 \hat{=}$ "negativ" = "Zust. φ liegt nicht vor"



(2.2) Messung M_φ an System im Zustand $\psi \in \mathcal{H}$ positiv mit Wahrscheinlichkeit

$$p = |\langle \varphi, \psi \rangle|^2$$

(Bornsche Regel)



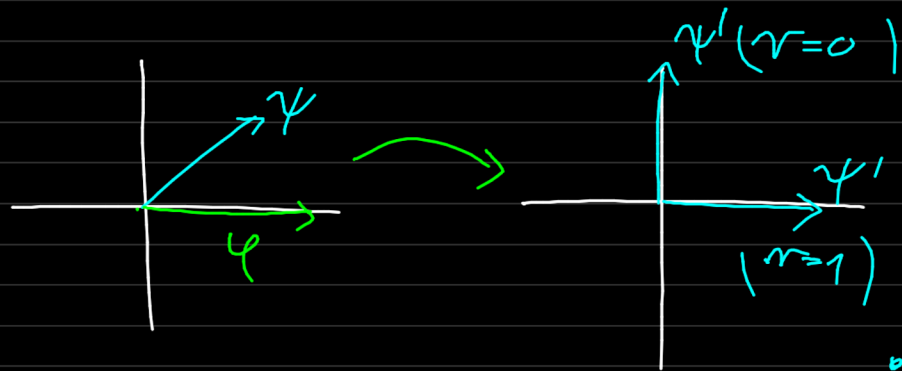
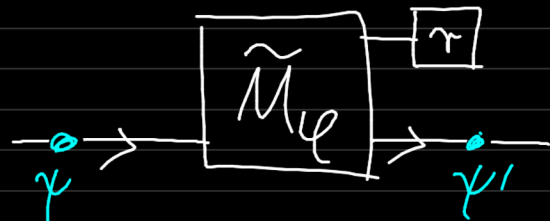
(2.3) es gibt ideales Messgerät
 $\tilde{M}_\psi$ d.h., dass

nach positiver Messung, Systemzust $\psi' = \psi$,
nach negativer Messung, Systemzust

$$\psi' = \frac{1}{\sqrt{q}} \bar{P}_\psi \psi$$

wobei $\bar{P}_\psi$ orthogonalprojektion auf ψ
 und $q = 1 - p$

$$\bar{P}_\psi \psi = \psi - \langle \psi, \psi \rangle \psi \quad \checkmark$$



Anwendung im Bsp NH_3 $\leftarrow$
 Messung M_{φ_L} an System im Zust.

$$1) \psi = \varphi_L : \rightarrow p = |\langle \varphi_L, \varphi_L \rangle|^2 = \|\varphi_L\|^2 = 1$$

$$2) \psi = \varphi_R : \rightarrow p = |\langle \varphi_L, \varphi_R \rangle|^2 = 0$$

$\leadsto \varphi_L \perp \varphi_R$



$$3) \psi = \varphi_{L+R} = \frac{\varphi_L + \varphi_R}{\|\varphi_L + \varphi_R\|} = \frac{\varphi_L + \varphi_R}{\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow p = |\langle \varphi_L, \varphi_{L+R} \rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

$\leadsto$ Quantenmechanische Vorhersage: Messung M_{φ_L} an Syst. im Zust. φ_{L+R}

positiv mit Wkt. $p = 1/2$

→ experimenteller Test:

Messe $N \gg 1$ NH_3 -Mol.

jeweils im Zustand φ_{L+R}

→ relative Häufigkeit positiver Messungen.

$$h_+ = \frac{N_+}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} p = \frac{1}{2} !$$

g^{00} 16^{00}

↳ g^{00}

→ 11:45

→ 13:40