

Wdhlg.: Generatoren der Drehgruppe  $SO_3$

$$J_\ell := \frac{d}{d\varphi} R_\ell(\varphi) \rightarrow R_\ell(\varphi) = e^{J_\ell \varphi}$$

$$\rightarrow J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

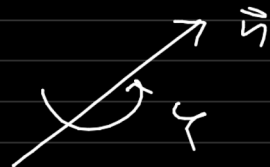
Kommutator-Relationen:

$$\bullet [J_1, J_2] = J_3, \quad [J_2, J_3] = J_1, \quad [J_3, J_1] = J_2$$

$$\rightarrow \vec{J} \cdot \vec{n} = J_1 n_1 + J_2 n_2 + J_3 n_3$$

Generator von  $R_{\vec{n}}(\varphi)$ :

$$\text{a. h.} \quad R_{\vec{n}}(\varphi) = e^{\vec{n} \cdot \vec{J} \varphi}$$



QM: Rotation eines Zustandsvektors  
↳ Streuungstheorie

$$SO_3 \longrightarrow SU(2)$$

$$R \longmapsto U(R)$$

$$\vec{x} \mapsto \vec{x}' = R\vec{x}$$

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = U(R)|\psi\rangle$$

$$R \rightarrow U(R) \quad \text{Gruppenhomom. !}$$

$$U(\mathbb{1}_3) = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$$

$$U(RR') = U(R)U(R') \quad !$$

Darstellungstheorem

$$G \rightarrow H$$

$$R = e^{\vec{\theta}} \mapsto U(R) = e^{f(\vec{\theta})}$$

Gruppenhomomorphismus

$$: \Leftrightarrow [f(\vec{\theta}), f(\vec{\theta}')] \stackrel{!}{=} f([\vec{\theta}, \vec{\theta}'])$$

# 1) Rotation eines Spinzustands

$$SO_3 \rightarrow SU(2)$$

$$\mathcal{H} = \text{Span}\{|z+\rangle, |z-\rangle\}$$

$$R = e^{\vec{\theta}} \mapsto U(R) = e^{\frac{i}{2} \vec{\theta} \cdot \vec{\sigma}}$$

$$f(\vec{\sigma}) := -\frac{i}{2} \vec{\sigma}$$

$$[\sigma_1, \sigma_2]$$

$$2.2: [f(\vec{\sigma}_1), f(\vec{\sigma}_2)] = f(\vec{\sigma}_3) \quad \checkmark$$

$$= -\frac{1}{4} [\underbrace{\sigma_1, \sigma_2}_{2i\sigma_3}] = -\frac{i}{2} \sigma_3 = \checkmark$$

$$\mapsto R_z(\varphi) \mapsto$$

$$U_z(\varphi) = e^{-\frac{i}{2} \sigma_z \varphi}$$

$$\left( e^{\frac{i}{2} \sigma_z \varphi} \right) \mapsto e^{f(\vec{\sigma}) \varphi} \quad \uparrow$$

$$R_{\vec{n}}(\varphi) \mapsto$$

$$U_{\vec{n}}(\varphi) = e^{-\frac{i}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \varphi}$$

## Rotation eines Teilchenzustands

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H} = \text{Span}\{|\vec{x}\rangle\}$$

$$f(\vec{r}_e) := -\frac{i}{\hbar} (\vec{\hat{x}} \times \vec{\hat{p}})_e$$

$$2.2: [f(\vec{r}_1), f(\vec{r}_2)] \stackrel{?}{=} [f(\vec{r}_3)]$$

$$= -\frac{1}{\hbar^2} [x_2 p_3 - x_3 p_2, x_3 p_1 - x_1 p_3]$$

$$= -\frac{1}{\hbar^2} \left( \overbrace{[x_2 p_3, x_3 p_1]}^{=0} - \overbrace{[x_2 p_3, x_1 p_3]}^{=0} - \overbrace{[x_3 p_2, x_3 p_1]}^{=0} + \overbrace{[x_3 p_2, x_1 p_3]}^{=0} \right)$$

$$= -\frac{1}{\hbar^2} \left( x_2 p_1 \overbrace{[p_3, x_3]}^{-i\hbar} + x_1 p_2 \overbrace{[x_3, p_3]}^{+i\hbar} \right)$$

$$= \frac{i}{\hbar} (x_2 p_1 - x_1 p_2) = -\frac{i}{\hbar} (\vec{x} \times \vec{p})_3$$

$$= f(\vec{r}_3)!$$

(Rest analog)

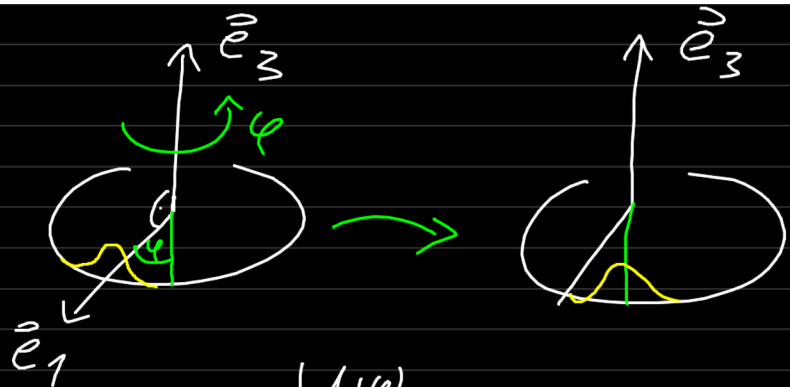
$$\rightarrow U_L(\varphi) = e^{-\frac{i}{\hbar} (\vec{x} \times \vec{p})_L \varphi}$$

$$U_{\vec{n}}(\varphi) = e^{-\frac{i}{\hbar} (\vec{x} \times \vec{p}) \cdot \vec{n} \cdot \varphi}$$

Beispiel:

Rotation  $R_3(\varphi)$  vom T.z.  $|\psi\rangle$   
mit Wellenf.  $\underline{\psi(\vec{x})}$  ( $= \langle \vec{x} | \psi \rangle$ )

Erwartung:



$$\psi(\vec{x}) \xrightarrow{U_3(\varphi)} \psi'(\vec{x}) = \psi(R_3(\varphi) \vec{x})$$

Rechnung für  $\varphi = \Delta\varphi \ll 1$ :

$$\psi'(\vec{x}) = U_3(\Delta\varphi) \psi(\vec{x}) =$$

Darstellungstheorem:

$$U: G \rightarrow H \quad (*)$$

$$e^{\vec{x}} \rightarrow e^{f(\vec{x})} = U(e^{\vec{x}}) \Leftrightarrow [f(\vec{x}), f(\vec{x}')] \\ \stackrel{!}{=} f([\vec{x}, \vec{x}'])$$

Gruppenhomomorphismus

Warum? " $\Leftarrow$ "

$$2.2. \quad U(1_G) = 1_H \quad \checkmark$$

$$U(RR') \stackrel{!}{=} U(R)U(R')$$

$\downarrow$  lin. Abb.

mit  $R=e^{\vec{x}}, R'=e^{\vec{x}'}$

$$U(RR') = U(e^{\vec{x}}e^{\vec{x}'})$$

$$= U(\exp(\vec{x} + \vec{x}' + \frac{1}{2}[\vec{x}, \vec{x}']$$

$\underbrace{R \in H}_{\cong}$

$$+ \frac{1}{12}[\vec{x}, [\vec{x}, \vec{x}']] + \frac{1}{12}[\vec{x}', [\vec{x}', \vec{x}]] + \dots)$$

$\stackrel{(*)}{=}$

$$\exp(f(\vec{x}) + f(\vec{x}') + \frac{1}{2}[f(\vec{x}), f(\vec{x}')] \\ + \frac{1}{12}[f(\vec{x}), [f(\vec{x}), f(\vec{x}')] + \dots])$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar} \left( \underbrace{x_1 \hat{p}_2}_{-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_2}} - \underbrace{x_2 \hat{p}_1}_{-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_1}} \right) \Delta\varphi} \cdot \psi(x_1, x_2, x_3)$$

$$= \left( e^{-\Delta\varphi x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + \Delta\varphi x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}} \right) \psi(x_1, x_2, x_3)$$

$$\stackrel{\Delta\varphi \ll 1}{\approx} \psi(\vec{x}) - \underbrace{\Delta\varphi x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \psi(\vec{x})} + \underbrace{\Delta\varphi x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \psi(\vec{x})}$$

$$= \psi(\underbrace{x_1 + \Delta\varphi x_2}_{\text{new } x_1}, \underbrace{x_2 - \Delta\varphi x_1}_{\text{new } x_2}, x_3)$$

$$= \psi \left( \underbrace{(1 \oplus \Delta\varphi \mathcal{J}_3)}_{\mathcal{J}_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} \vec{x} \right)$$

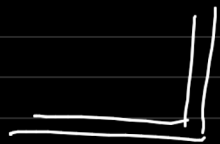
$$= \psi \left( \underbrace{e^{-\Delta\varphi \mathcal{J}_3}}_{\mathbb{I}} \vec{x} \right)$$

$$= \psi \left( R_3^{\mathbb{I}}(-\Delta\varphi) \vec{x} \right)$$

⌈ along  $\varphi$ :

$$U_3(\varphi) = U_3\left(\frac{\varphi}{N}\right) \xrightarrow{N} \dots \xrightarrow{N} \psi'(\vec{x}) = \psi(R_3(-\varphi) \vec{x})$$

$$\begin{aligned} \text{B.C.H} \\ &= e^{f(\vec{\alpha})} e^{f(\vec{\alpha}')} = U(e^{\vec{\alpha}}) U(e^{\vec{\alpha}'}) \\ &= \underline{U(R)} \underline{U(R')} \end{aligned}$$



## Quantenmechanischer Drehimpuls

Rotation:  $SO_3 \rightarrow SU(2)$

$$R \mapsto U(R)$$

$$e^{\vec{\alpha}} \mapsto e^{f(\vec{\alpha})} \quad (*)$$

↓

Drehimpulsoperatoren als Erzeuger von  $U(R)$ :

$$I_e := i \hbar \left. \frac{dU_e(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi=0}^* = i \hbar f(\vec{e})$$



$$\vec{I} = (I_1, I_2, I_3)$$

$$\rightarrow U_I(\varphi) = e^{-\frac{i}{\hbar} I_z \cdot \varphi}$$

$$U_{\vec{n}}(\varphi) = e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{n} \cdot \vec{I} \cdot \varphi}$$

Vgl.: Impuls:  $\hat{p}_e := -i\hbar \frac{\partial T(\vec{s})}{\partial \vec{s}} \Big|_{\vec{s}=0}$

$$\rightarrow T(\vec{s}) = e^{-i \vec{s} \cdot \vec{p} / \hbar}, \quad [p_i, p_j] = 0$$

Kommutatorrelationen  
 "  $\partial_x \rightarrow I_x$  " )

$$[I_1, I_2] = -\hbar^2 [f(\partial_1), f(\partial_2)]$$

$$= -\hbar^2 f(\underbrace{[\partial_1, \partial_2]}_{\partial_3}) = -\hbar^2 f(\partial_3)$$

$$= i\hbar I_3 \quad \text{ebenso für zykl. Vert. der Ind.}$$

$$[I_h, I_e] = i\hbar \sum_{h \neq m} I_m$$

# 1) Drehimpulsoperatoren für Spin

$$(f(\vec{J}_e) := -i \frac{\sigma_e}{2} !)$$

$$S_e \equiv I_e = i\hbar(-i \frac{\sigma_e}{2}) = \frac{\hbar}{2} \sigma_e$$

$$\rightarrow \vec{S}_e \equiv \vec{I} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$$

$$\rightarrow U_{\vec{n}}(\varphi) = e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{S} \cdot \vec{n} \varphi} = e^{-i \frac{\varphi}{2} \vec{n}} \varphi$$

$$\rightarrow [S_1, S_2] = i\hbar S_3$$

# 2) Drehimpuls eines Teilchens

$$((f(\vec{J}_e) = -\frac{i}{\hbar} (\vec{X} \times \vec{P})) )$$

$$\rightarrow L_e = I_e = (\vec{X} \times \vec{P})_e$$

Bahndrehimpuls

$$\vec{L} = \vec{X} \times \vec{P}$$

$$\rightarrow U_{\vec{n}}(\varphi) = e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{L} \cdot \vec{n} \varphi}$$

## Eigenwerte und -zustände der Drehimpulsoperatoren

Ausgangspkt:  $[I_h, I_l] = i\hbar \epsilon_{hlm} I_m$

$$\rightarrow I^2 := I_1^2 + I_2^2 + I_3^2$$

$$\rightarrow [I^2, I_3] = 0 \quad (\text{vgl. Übs.})$$

→ gemeinsame Eigenbasis von  $I^2$  und  $I_3$

gem. Eigenzust  $|a, b\rangle$

$$\begin{array}{ccc} I^2 & , & I_3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ a & & b \end{array} \quad \begin{array}{l} I^2 |a, b\rangle = a |a, b\rangle \\ I_3 |a, b\rangle = b |a, b\rangle \end{array}$$

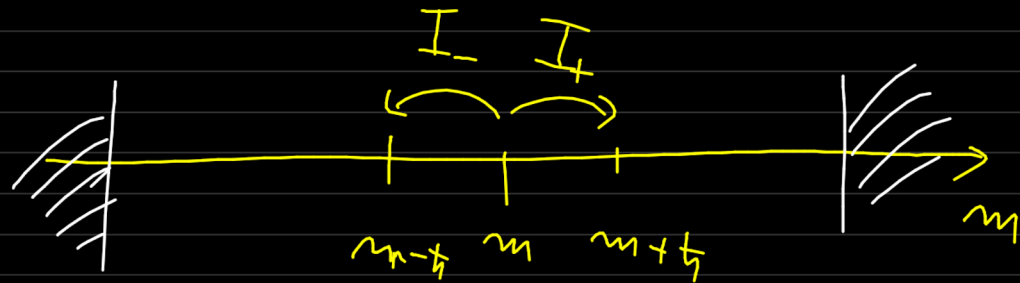
hilfsmittel: Leiteroperatoren:

$$I_+ := I_1 + iI_2$$

$$I_- := I_1 - iI_2$$

$$\rightarrow [I_3, I_+] = \hbar I_+$$

$$[I_3, I_-] = -\hbar I_- \quad \checkmark$$



$$2: I^2 - I_3^2 = I_1^2 + I_2^2 \geq 0$$

$$[a, a^\dagger] = +1$$

$$[a, a] = 0$$



$$a^\dagger a \geq 0$$