Wdhlg.: q.m. Drehimpuls

Rot.-trafo : $SO_3 \longrightarrow SU(\mathcal{H})$

$R \longmapsto U(R)$

z.B. $R_\ell(\varphi) \longmapsto U_\ell(\varphi)$

$\quad\; \| \qquad\qquad\qquad \|$

$e^{J_\ell \varphi} \qquad\quad e^{f(J_\ell)\varphi}$

Drehimpuls = Erzeuger der Rot.-trafo

$$\boxed{I_\ell := i\hbar \frac{d}{d\varphi} U_\ell(\varphi)\Big|_{\varphi=0}} = i\hbar f(J_\ell)$$

$\vec{I} = (I_1, I_2, I_3)$

$\rightarrow U_\ell(\varphi) = e^{-\frac{i}{\hbar} I_\ell \varphi}$

$U_{\vec{n}}(\varphi) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{n}\cdot\vec{I}\varphi}$

Kommutatorrel.: $\boxed{[I_k, I_\ell] = i\hbar\, \varepsilon_{k\ell m} I_m}$

$SO_3: \; [J_k, J_\ell] = \varepsilon_{k\ell m} J_m$

$(\vec{I})^2 = I^2 = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2$

- **Spin** (Elektron/Proton, Neutron).

$$I_\ell \equiv S_\ell = \frac{\hbar}{2}\sigma_\ell \,, \quad \vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \,,$$

$$[S_k, S_\ell] = i\hbar\, \varepsilon_{k\ell m} S_m$$

- **Bahndrehimpuls**

$$I_\ell \equiv L_\ell = (\hat{x} \times \hat{p})_\ell$$

d.h. $\vec{L} = \hat{x} \times \hat{p}$

Eigenwerte und -zustände

Ausgangspunkt:

$$[I_k, I_\ell] = i\hbar\, \varepsilon_{k\ell m} I_m \;!$$

$$\Rightarrow [I^2, I_3] = 0 \quad \text{(vgl. Übg.)}$$

$\longrightarrow$ gemeinsame Eigenzustände $|a, b\rangle$

$$I^2 |a, b\rangle = a\,|a, b\rangle, \quad I_3 |a, b\rangle = b\,|a, b\rangle$$

Leiteroperatoren: $I_+ := I_1 + i I_2$

$$I_- := I_1 - i I_2$$

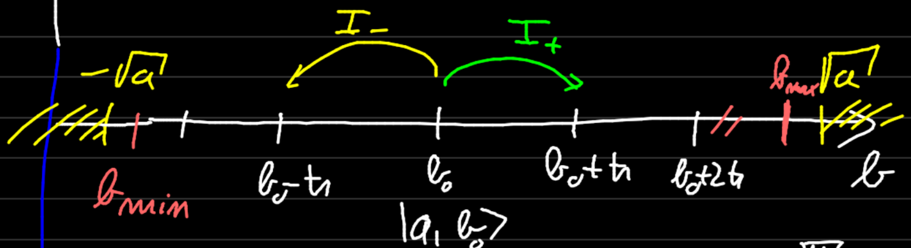
$$\rightarrow \quad [I_3, I_+] = \hbar I_+$$

$$[I_3, I_-] = -\hbar I_-$$

$$\rightarrow \quad I_+ |a, b\rangle = c_+ |a, b+\hbar\rangle$$

$$I_- |a, b\rangle = c_- |a, b-\hbar\rangle$$

oder: $I_\pm |a, b\rangle = 0$ (vgl. Übg.)



$$I_1^2 + I_2^2 = \underbrace{I^2}_{a} - \underbrace{I_3^2}_{b^2} \overset{!}{\geq} 0$$

also Nebenbedingung: $a - b^2 \geq 0$

$$\boxed{|b| \leq \sqrt{a}}$$

$$\rightarrow \quad I_+ |a, b_{max}\rangle \overset{!}{=} 0$$

$$I_- |a, b_{min}\rangle \overset{!}{=} 0$$

$$\rightarrow \underbrace{I_- I_+}_{\shortparallel} |a, b_{max}\rangle = 0$$

$$(I_1 - iI_2)(I_1 + iI_2) = I_1^2 + I_2^2 + i\underbrace{[I_1, I_2]}_{i\hbar I_3}$$

$$= (I^2 - I_3^2 - \hbar I_3)$$

mit $(I^2 - I_3^2 - \hbar I_3)|a, b_{max}\rangle$

$$= (\underbrace{a - b_{max}^2 - \hbar b_{max}}_{\overset{!}{=} 0 \ !})|a, b_{max}\rangle \overset{!}{=} 0$$

$$\rightarrow \quad a = b_{max}(b_{max} + \hbar)$$

analog: $I_+ I_- |a, b_{min}\rangle \overset{!}{=} 0$

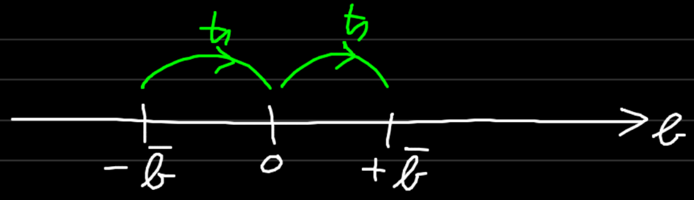
$\vdots$

$$\rightarrow \quad a = b_{min}(b_{min} - \hbar)$$

$b_{min} < 0 < b_{max}$

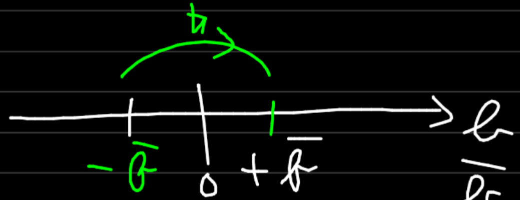
$$\rightarrow \quad b_{max} \equiv -b_{min} = \bar{b}$$

z.B.



$\rightarrow$ $\bar b$ ganzzahliges Vielfaches von $\hbar$!

aber auch:



$\bar b$ halbzahliges V.F. von $\hbar$!

$$\rightarrow \quad \bar b = j \cdot \hbar$$

mit $j \in \{0, +\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \dots$

$$\rightarrow \quad a = \bar b (\bar b + \hbar)$$

$$\boxed{a = \hbar^2 j (j+1)}$$

$$|\underset{\hbar^2 j(j+1)}{a}, \underset{m\hbar}{b}\rangle \longrightarrow |j, m\rangle$$

Drehimpulseigenzustand

der Quantenzahlen

$j \in \{0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots\}$

$\hookrightarrow m \in \{-j, -j+1, \dots, j-1, j\}$

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} I^2 |j,m\rangle &= \hbar^2 j(j+1) |j,m\rangle \\ I_3 |j,m\rangle &= \hbar m |j,m\rangle \end{aligned}}$$

$\rightarrow$ <u>Eigenraum von I^2</u> zum EW $\hbar^2 j(j+1)$ von <u>Dimension</u> $(2j+1)$

- <u>Spin des Elektrons (...)</u>

$\dim \mathcal{H} = 2!$ $= \operatorname{span}\{|z+\rangle, |z-\rangle\}$

$\rightarrow 2j+1 \overset{!}{=} 2 \rightarrow \boxed{j = 1/2}$ $= s = 1/2$

$m \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$

$\boxed{\text{Spin-}1/2 \text{ Teilchen}}$

$\hookrightarrow |1/2, +1/2\rangle \equiv |z+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$|1/2, -1/2\rangle = |z-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$S_\ell = \frac{\hbar}{2}\sigma_\ell, \quad \vec{S} = \frac{\hbar}{2}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

$S_3 \,|1/2, \pm 1/2\rangle = S_3 \,|z\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}$ ✓

$S^2 \,|1/2, \pm 1/2\rangle \overset{!}{=} \hbar^2 \underbrace{s(s+1)}_{= \frac{3\hbar^2}{4}} \,|\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}\rangle \qquad s = 1/2$

$S^2 = \frac{\hbar^2}{4}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)$

$\sigma_\ell^2 = 1$

$= \frac{3\hbar^2}{4} \cdot 1$

Bahndrehimpuls: $\vec{I} = \vec{L} = \hat{x} \times \hat{p}$

$j, m \qquad \ell, m$

$\hat{=} j$

Eigenmode ✓

Eigenfunktionen:

$$\boxed{\langle \vec{n}_{\vartheta,\varphi} | \ell, m\rangle =: Y_{\ell,m}(\vartheta, \varphi)}$$

Kugelflächenfkt.

$|\vec{n}_{\vartheta,\varphi}| \equiv 1$

Eigenwerte: $\hat{L}_3$ in Zylinderkoord.:

- $L_3 \psi(r, \varphi, z) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\varphi} \psi(r, \varphi, z)$
- 2π Periodizität: $\psi(r, \varphi + 2\pi, z) \overset{!}{=} \psi(r, \varphi, z)$

$\rightarrow$ Eigenwert von L_3 ist ganzzahliges Vielfaches von $\hbar$

m ganzzahlig $\rightarrow$ $l \equiv j$ ganzzahlig!

$l = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$\hookrightarrow m = -l, -l+1, \ldots, 0, \ldots, l-1, l$ ✓

Drehimpulsoperator in Ortsdarstellung

$$\vec{L} \hat{=} \hat{\vec{x}} \times (-i\hbar \vec{\nabla})$$

$$= -i\hbar \begin{pmatrix} x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

in Kugelkoordinaten:

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\vec{x} = r\vec{e}_r$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow L_3 = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$L^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$$

$\rightarrow$ Kugelfl.-fkten $Y_{l,m}(\vartheta,\varphi)$ genügen:

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}Y_{l,m} \overset{!}{=} \hbar m Y_{lm}$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial\varphi}Y_{l,m} = imY_{lm}$$

$$\rightarrow Y_{l,m}(\vartheta,\varphi) = f(\vartheta)e^{im\varphi}$$

"L^2":

$$\left(+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + l(l+1) \right) Y_{l,m}(\vartheta,\varphi) \stackrel{!}{=} 0$$

→ $l=0$: $Y_{00}(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$

$l=1$: $Y_{1,0}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta$

$Y_{1,\pm1}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\, e^{\pm i\varphi}$

Normierung / Orthogonalität:

$$\int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin\vartheta \; Y^*_{l,m}(\vartheta,\varphi)\, Y_{l',m'}(\vartheta,\varphi) \stackrel{!}{=} \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

$\ell = 2$: $\quad Y_{2,0} = \dots (3\cos^2\vartheta - 1)$

$Y_{2,\pm 1} = \dots \sin(2\vartheta)\, e^{\pm i\varphi}$

$Y_{2,\pm 2} = \dots \sin^2(\vartheta)\, e^{\pm i2\varphi}$

$$|\psi_{E\ell m}|^2 = \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\vartheta \int_0^\varphi d\varphi\, \cancel{r^2} \sin\vartheta\, \frac{|u|^2}{\cancel{r^2}} \cdot |Y_{\ell m}|^2$$

$$= \int_0^\infty dr\, |u|^2 \cdot 1$$

$$\psi_{\ell,m,E}(r,\vartheta,\varphi) = \frac{u(r)}{r} Y_{\ell,m}(\vartheta,\varphi)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r}$$

$\langle \vec{n}_{\varphi,\vartheta}| \dots$

$$\langle \vec{n}_{\vartheta\varphi}| L_3 |\ell, m\rangle = \hbar m |\ell, m\rangle$$

$\downarrow$

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial\varphi} Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi) = \hbar m\, Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)$$