

Wdhlg.: Störungstheorie: $H = H_0 + \lambda H_1$

$|n\rangle, E_n$

$$\hookrightarrow E_n(\lambda) = E_n + \langle n | \lambda H_1 | n \rangle$$

$$+ \sum_{m \neq n} \frac{\langle m | \lambda H_1 | n \rangle^2}{E_n - E_m} + O(\lambda^3)$$

$$|n(\lambda)\rangle = |n\rangle + \sum_{m \neq n} \frac{\langle m | \lambda H_1 | n \rangle}{E_n - E_m} |m\rangle + O(\lambda^2)$$

Heute: zeitabhängige Störungstheorie

$$\hookrightarrow H(t) = H_0 + \underline{V(t)}$$

$|n\rangle, E_n$; $V(t)$ "klein"

$(\|V(t)\| \ll \|H_0\|)$
 $[H_0, V(t)] \neq 0$

$\hookrightarrow H_0 \hat{=} \text{Atom}$

$V(t) \hat{=} \text{el. mag. Wechselfeld}$

typische Fragestellung

→ Übergangsmktn / -raten:

$$\begin{array}{ccc} t_1 = 0 & P_{mn}(t) & t_2 = t_1 + t \\ |n\rangle & \xrightarrow{V(t)} & |m\rangle \\ & \text{=} & \end{array}$$

$$P_{mn}(t) = ?$$

$$\left[V(t) = 0 : P_{mn}(t) = \delta_{mn} \dots \right]$$

Methode: trenne H_0 -Dynamik
(einfach!)

von $V(t)$ -Dynamik
("klein!")

→ Störungstheorie in $V(t)$!

Wechselwirkungsbild
(Dirac-Darstellung)

→ zunächst:

QM im Heisenbergbild

$\langle A \rangle_{\psi(t)}$ $= \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle$

konstant $\nearrow$ *zeit-abhängig*

$\langle \psi_0 | U^\dagger(t) \quad U(t) | \psi_0 \rangle$

$U(t) = e^{-iHt/\hbar}$

$$= \langle \psi_0 | \underbrace{U^\dagger(t) A U(t)}_{A_H(t)} | \psi_0 \rangle = \langle \underbrace{A_H(t)}_{\text{zeitabhängig}} | \underbrace{\psi_0}_{\text{konstant}} \rangle$$

Operator im Heisenbergbild:

$$A_H(t) := U^\dagger(t) A U(t)$$

$\rightarrow$ Dynamik

$$\dot{A}_H(t) = \frac{i}{\hbar} [H, A_H(t)]$$

$$A_H(0) = A$$

Zust.: $|\psi\rangle = |\psi_0\rangle$ konst.

$$\frac{d}{dt} U(t) = -\frac{i}{\hbar} H U(t) \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} U^\dagger(t) = +\frac{i}{\hbar} H U^\dagger(t)$$

$\uparrow$
 $U(t) = e^{-iHt/\hbar}$

Wechselwirkungs-
 bild $\hat{=}$ $\begin{cases} \text{im } H_0 \text{ Heisenbergbild} \\ \text{im } V(t) \text{ Schrödingerbild} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \dot{A}_H(t) &= \frac{d}{dt} (U^\dagger(t) A U(t)) \\ &= \frac{i}{\hbar} H \underbrace{U^\dagger(t) A U(t)}_{A_H(t)} + \underbrace{U^\dagger(t) A}_{A_H(t)} \left(-\frac{i}{\hbar} H U(t) \right) \\ &= \frac{i}{\hbar} [H, A_H] \end{aligned}$$

Ausgangspunkt:

$|\psi(t)\rangle$: Zustand, Dynamik
 gemäß S. Gl.:

$$H(t) = H_0 + V(t)$$

$$\Rightarrow |\dot{\psi}(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} (H_0 + V(t)) |\psi(t)\rangle$$

Def: Zustand im UV-Bild:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_I &:= e^{+\frac{i}{\hbar} H_0 t} |\psi(t)\rangle \\ &= U_0^\dagger(t) |\psi(t)\rangle \\ &= U_0^\dagger(t) U(t) |\psi(0)\rangle \end{aligned}$$

$$U_0(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t},$$

Erwartungswert:

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_{\psi(t)} &= \langle \psi(t) | \underbrace{U_0(t) U_0^\dagger(t)}_{\langle \psi(t) |}_I \underbrace{A U_0(t) U_0^\dagger(t)}_{A_I(t)} \underbrace{|\psi(t)\rangle}_I \rangle \\ &= \langle \psi(t) | A_I | \psi(t) \rangle_I \\ &= \langle A_I(t) \rangle_{\psi_I(t)} \end{aligned}$$

Operator im WW-Bild

$$A_I(t) = U_0^\dagger(t) A U_0(t)$$

Berechnung von Übergangswkten /-raten:

$$\begin{array}{ccc} |\psi_0\rangle = |n\rangle & \longrightarrow & |\psi_n(t)\rangle \\ t=0 & & t>0 \\ |n\rangle & \xrightarrow{p_{mn}(t)} & |m\rangle \end{array}$$

$$p_{mn}(t) = |\langle m | \psi_n(t) \rangle|^2$$

$$= |\langle m | e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} | \psi_n(t) \rangle_I|^2$$

$$|\psi_n(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} | \psi_n(t) \rangle_I$$

$$\rightarrow p_{mn}(t) = |\langle m | \psi_n(t) \rangle_I|^2$$

Störungstheorie für $|\psi_n(t)\rangle_I$
in $V(t)$:

Dynamik des Zust. $|\psi(t)\rangle_I$ im
WW Bild:

$$i\hbar |\dot{\psi}(t)\rangle_I = i\hbar \frac{d}{dt} \left(e^{+\frac{i}{\hbar} H_0 t} |\psi(t)\rangle \right)$$

$$= -H_0 e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} |\psi(t)\rangle$$

$$+ i\hbar e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} |\dot{\psi}(t)\rangle$$

S.Gl. $\rightarrow$ $-\frac{i}{\hbar} (H_0 + V(t)) |\psi(t)\rangle$

$$\rightarrow i\hbar |\dot{\psi}(t)\rangle_I =$$

$$= \left(-H_0 + i\hbar \left(-\frac{i}{\hbar} H_0 \right) \right) e^{i H_0 t / \hbar} |\psi(t)\rangle$$

$$\underbrace{e^{i/\hbar H_0 t} V(t) e^{-i/\hbar H_0 t}}_{V_I(t)} |\psi(t)\rangle_I$$

$$|\dot{\psi}(t)\rangle_I = -\frac{i}{\hbar} V_I(t) |\psi(t)\rangle_I \quad (*)$$

Bestimmung von $|\psi(t)\rangle_I$ in
Störungstheorie mittels

Iteration von DGL (*):

0. Ordnung: $|\dot{\psi}(t)\rangle_I = 0$

$$\rightarrow |\psi(t)\rangle_I^{(0)} = |\psi(0)\rangle$$

1. Ordnung: $|\dot{\psi}(t)\rangle_I^{(1)} = -\frac{i}{\hbar} V_I(t) \underbrace{|\psi(t)\rangle_I^{(0)}}_{|\psi(0)\rangle}$

$$\rightarrow \boxed{|\psi(t)\rangle_I^{(1)} = |\psi(0)\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' V_I(t') |\psi(0)\rangle} \quad (*)$$

2. Ordnung: $|\dot{\psi}(t)\rangle_I^{(2)} = -\frac{i}{\hbar} V_I(t) |\psi(t)\rangle_I^{(1)}$

$$|\dot{\psi}(t)\rangle_I^{(2)} = -\frac{i}{\hbar} V_I(t) |\psi(0)\rangle - \underbrace{\frac{1}{\hbar^2} V_I(t) \int_0^t dt' V_I(t') |\psi(0)\rangle}$$

$$\rightarrow |\psi(t)\rangle_I^{(2)} = |\psi(0)\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' V_I(t') |\psi(0)\rangle - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt'' \int_0^{t''} dt' V_I(t'') V_I(t') |\psi(0)\rangle$$

Übergangswkt $P_{mn}(t)$ in 1. Ord. S.T.

$$P_{mn}^{(1)}(t) = |\langle m | \psi(t) \rangle_I|^2$$

$$\begin{aligned} (*) \quad |\psi(0)\rangle &= |n\rangle \\ &= \left| \langle m | \left(|n\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' V_I(t') |n\rangle \right) \right|^2 \\ &\stackrel{m \neq n}{=} \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^t dt' \underbrace{\langle m | V_I(t') | n \rangle}_{e^{+iE_m t'/\hbar} V(t) e^{-iE_n t'/\hbar}} \right|^2 \\ &= \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^t dt' e^{i(E_m - E_n) \frac{t'}{\hbar}} \langle m | V(t') | n \rangle \right|^2 \end{aligned}$$

speziell für: "harmonische Störung"

$$V(t) = U \cdot \cos(\Omega t)$$

$$= \frac{U}{2} (e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t})$$

$$\rightarrow P_{mn}^{(1)}(t) = \left| \frac{U_{mn}}{2\hbar} \right|^2 \left| \int_0^t dt' \right|^2$$

$$U_{mn} = \langle m | U | n \rangle$$

$$= e^{i(E_m - E_n)t/\hbar} \left(e^{i\Omega t'} + e^{-i\Omega t'} \right)^2$$

$$= \left| \frac{U_{mn}}{2\hbar} \right|^2 \left| \int_0^t dt' e^{i\omega_+ t'} + \int_0^t dt' e^{i\omega_- t'} \right|^2$$

$$\text{mit } \omega_{\pm} = \frac{E_m - E_n}{\hbar} \pm \Omega$$

$$\text{z.B.: } \int_0^t dt' e^{i\omega t'} = \frac{e^{i\omega t} - 1}{i\omega} = e^{i\frac{\omega t}{2}} \left(\frac{2 \sin(\frac{\omega t}{2})}{i\omega} \right)$$

$$\rightarrow \left| \int_0^t dt' e^{i\omega t'} \right|^2 = \frac{\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)}{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2} \quad \checkmark$$

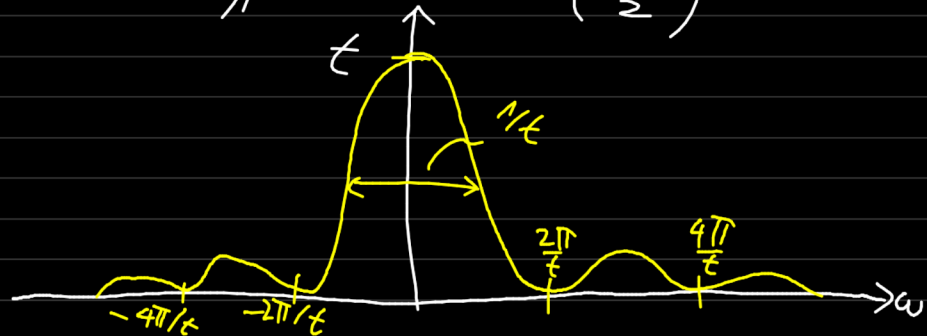
Übergangsrate:

$$\Gamma_{mn}^{(1)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P_{mn}^{(1)}(t)}{t}$$

unter Vernachlässigung der Mischterme:

$$\Gamma_{mn}^{(1)} = \left| \frac{\mu_{mn}}{2\pi} \right|^2 \left(f_t(\omega_+) + f_t(\omega_-) \right)$$

mit $f_t(\omega) = \frac{\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)}{t \left(\frac{\omega}{2}\right)^2}$



$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet f_t(0) \approx 1/t \\ \bullet \int_{-\infty}^{\infty} f_t(\omega) d\omega = 2\pi \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} f_t(\omega) = 2\pi \delta(\omega)$$

$$\rightarrow T_{mn}^{(1)} = \frac{|M_{mn}|^2}{4^2 \hbar^2} \left\{ \delta\left(\frac{E_m - E_n}{\hbar} + \Omega\right) + \delta\left(\frac{E_m - E_n}{\hbar} - \Omega\right) \right\}$$

$$T_{mn}^{(1)} = \frac{|M_{mn}|^2}{4\hbar} \left\{ \delta(E_m - E_n + \hbar\Omega) + \delta(E_m - E_n - \hbar\Omega) \right\}$$

"Fermi's golden Regel"

(Pauli 1926!)