Erinnerung: Tensorprodukt

QM eines zusammengesetzten Systems

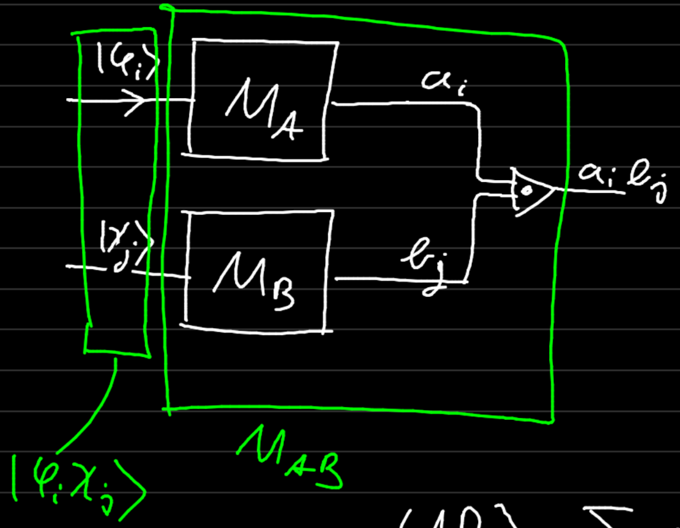
S_{12}

S_1: $\mathcal{H}_1$ mit ONB $|\varphi_1\rangle, \ldots, |\varphi_n\rangle$

S_2: $\mathcal{H}_2$ mit ONB $|\chi_1\rangle, \ldots, |\chi_m\rangle$

$\mathcal{H}_{12}$: ONB $\{|\varphi_i \chi_j\rangle\}_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}}$

1. + 2. Postulat:



$A = \sum_i a_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$

$B = \sum_j b_j |\chi_j\rangle\langle\chi_j|$

$$(AB) = \sum_{ij} a_i b_j |\varphi_i \chi_j\rangle\langle\varphi_i \chi_j|$$

ONB!

- $\mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$

  Tensorproduktraum von $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$

- (*) $|\varphi_i \chi_j\rangle = |\varphi_i\rangle|\chi_j\rangle = |\varphi_i\rangle \otimes |\chi_j\rangle$

- $\dim \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 = \dim \mathcal{H}_1 \cdot \dim \mathcal{H}_2$

$\Rightarrow$ allg. Vektoren $|\psi_{12}\rangle, |\phi_{12}\rangle, \ldots$

Linearkombinationen der $\{|\varphi_i\rangle \otimes |\chi_j\rangle\}$

- $|\psi_{12}\rangle = \sum_{ij} \mu_{ij} \, |\varphi_i\rangle \otimes |\chi_j\rangle$

- $|\phi_{12}\rangle = \sum_{ij} \nu_{ij} \, |\varphi_i\rangle \otimes |\chi_j\rangle$

$\Rightarrow$ Skalarprod.: $\langle \phi_{12} | \psi_{12}\rangle = \sum_{ij} \nu_{ij}^* \mu_{ij}$.

Tensorprodukt zweier Vektoren $|a\rangle \in \mathcal{H}_1, |b\rangle \in \mathcal{H}_2$

: (*) + Linearität :

$$\left.\begin{array}{l} |a\rangle = \sum a_i |\varphi_i\rangle \\ |b\rangle = \sum b_j |\chi_j\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow |a\rangle \otimes |b\rangle = \sum_{ij} a_i b_j |\varphi_i\rangle \otimes |\chi_j\rangle$$

$$\Rightarrow (|a_1\rangle + |a_2\rangle)\otimes|b\rangle = |a_1\rangle\otimes|b\rangle + |a_2\rangle\otimes|b\rangle$$

$\vdots$

⚠ i. A.

$$\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2 \ni |\Psi_{12}\rangle \neq |a\rangle\otimes|b\rangle \quad \text{(für alle } |a\rangle\in\mathcal{H}_1,\ |b\rangle\in\mathcal{H}_2\text{)}$$

$m\cdot n$ Koeffizienten $\gg$ $m+n$

u_{ij}! $=$ Koeff. a_i, b_j

Tensorprodukt zweier Operatoren

$$\left.\begin{array}{l} A\in \mathrm{End}(\mathcal{H}_1) \\ B\in \mathrm{End}(\mathcal{H}_2)\end{array}\right. \longmapsto A\otimes B \in \mathrm{End}(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2)$$

$$(A\otimes B)(|a\rangle\otimes|b\rangle) := (A|a\rangle)\otimes(B|b\rangle)$$

+ <u>Linearität</u>

$$\Rightarrow A\otimes B|\Psi_{12}\rangle = \sum_{ij} u_{ij}(A|\varphi_i\rangle)\otimes(B|\chi_j\rangle)$$

$\rightarrow \quad (A_1 + A_2) \otimes B = A_1 \otimes B + A_2 \otimes B$

$\rightarrow \quad (A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2)$

$$= (A_1 A_2) \otimes (B_1 B_2)$$

<u>insbes.</u>:

$$(A \otimes \mathbb{1}_2)(\mathbb{1}_1 \otimes B) = A \otimes B$$

<u>Notation</u>: $A \otimes \mathbb{1}_2 \equiv A, \quad \mathbb{1}_1 \otimes B \equiv B$

$\rightarrow \quad AB = (A \otimes \mathbb{1}_2)(\mathbb{1}_1 \otimes B) = A \otimes B$

$\quad\;\, " \quad BA = (\mathbb{1}_1 \otimes B)(A \otimes \mathbb{1}_2) = A \otimes B$

$\Rightarrow \quad (A \otimes B)^n = A^n \otimes B^n$

$$e^{A \otimes B} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} (A \otimes B)^{\ell} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} (A^{\ell} \otimes B^{\ell})$$

$\hat{x} S_3 \qquad \left(\neq \cancel{e^{A} \otimes e^{B}} \right)$

Beispiel:

$$\mathcal{H}_1 = \mathrm{Span}\{|x\rangle\}$$

$$\mathcal{H}_2 = \mathrm{Spin}\{|z+\rangle, |z-\rangle\}$$

Operator: $T(a\hat{S}_3) := e^{-\frac{i}{\hbar}a\hat{S}_3\hat{p}}$

$$T(a\hat{S}_3)|\Psi\rangle = ?$$

1) $|\Psi\rangle = |\psi_+\rangle\otimes|z+\rangle + |\psi_-\rangle\otimes|z-\rangle$

2) $T(a\hat{S}_3)|\psi_+\rangle|z+\rangle = \sum_\ell \frac{1}{\ell!}\left(-\frac{ia}{\hbar}\hat{p}\otimes\hat{S}_3\right)^\ell |\psi_+\rangle|z+\rangle$

$$= \left(\sum_\ell \frac{1}{\ell!}\left(-\frac{ia}{\hbar}\hat{p}\right)^\ell \otimes \hat{S}_3^\ell\right)|\psi_+\rangle\otimes|z+\rangle$$

$$\hat{S}_3^\ell|z+\rangle = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^\ell|z+\rangle$$

$$= \underbrace{\left(\sum_\ell \frac{1}{\ell!}\left(-\frac{ia}{\hbar}\frac{\hbar}{2}\hat{p}\right)^\ell|\psi_+\rangle\right)}_{= e^{-\frac{ia}{\hbar}\frac{\hbar}{2}\hat{p}} = T\left(\frac{a\hbar}{2}\right)} \otimes |z+\rangle$$

$$\boxed{T(a\hat{S}_3)|\psi_+\rangle|z+\rangle = \left(T\left(\frac{a\hbar}{2}\right)|\psi_+\rangle\right)|z+\rangle}$$

analog: $T(a\hat{S}_3)|\psi_-\rangle \otimes |z-\rangle$

$$= \left(T\left(-\frac{a\hbar}{2}\right)|\psi_-\rangle\right) \otimes |z-\rangle$$

d. h.

$$T(a\hat{S}_3)\Big(|\psi_+\rangle|z+\rangle + |\psi_-\rangle|z-\rangle\Big)$$

$$= \left(T\left(a\frac{\hbar}{2}\right)|\psi_+\rangle\right)|z+\rangle + \left(T\left(-a\frac{\hbar}{2}\right)|\psi_-\rangle\right)|z-\rangle$$

Translation im Ortsraum:

$$T(a) = e^{-ia\hat{p}/\hbar}$$

(I) $\hat{p}$ Erzeugen der Transl.!

$$\hat{p} := i\hbar \frac{\partial T(a)}{\partial a}\Big|_{a=0};$$

$$T(a+a') = T(a)\,T(a')$$

$$\frac{dT(a)}{da} = -\frac{i}{\hbar}\hat{p}\,T(a) \rightarrow$$

(II) $\quad |\psi_0\rangle \longrightarrow |\psi_1\rangle := e^{-ia\hat{p}/\hbar}|\psi_0\rangle$

$$\langle\hat{x}\rangle_{\psi_1} = \langle\psi_1|\hat{x}|\psi_1\rangle = \langle\psi_0|\underbrace{e^{+\frac{ia\hat{p}}{\hbar}}\hat{x}\,e^{-\frac{iap}{\hbar}}}_{*}|\psi_0\rangle$$

$$* = e^{+\frac{ia}{\hbar}[\hat{p},\ldots]}\,\hat{x}$$

$$= \hat{x} + \frac{ia}{\hbar}\underbrace{[\hat{p},\hat{x}]}_{-i\hbar} + 0 = \underline{\underline{\hat{x} + a\mathbb{1}}}$$

$$\rightarrow \langle\hat{x}\rangle_{\psi_1} = \langle\hat{x} + a\mathbb{1}\rangle_{\psi_0}$$

$$= \langle\hat{x}\rangle_{\psi_0} + a$$

d.h. $\quad e^{-ia\hat{p}/\hbar} = T(a) \quad !$

Translation im Impulsraum:

$$\boxed{e^{+iq\hat{x}/\hbar} \stackrel{!}{=} \tilde{T}(q)}$$

$$|\psi_0\rangle \longrightarrow |\psi_1\rangle = e^{iq\hat{x}/\hbar}\,|\psi_0\rangle$$

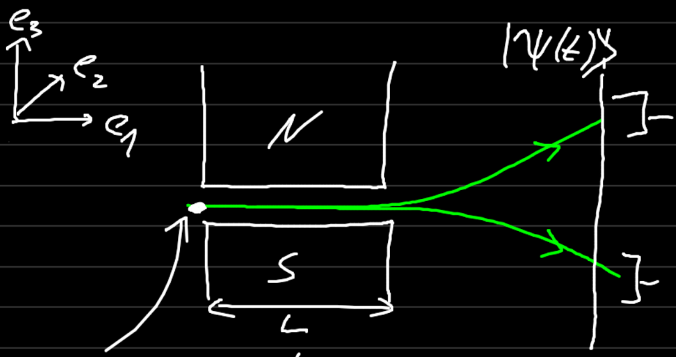
$$\langle\hat{p}\rangle_{\psi_1} = \langle\psi_0|\,\underbrace{e^{-iq\hat{x}/\hbar}\,\hat{p}\,e^{+iq\hat{x}/\hbar}}_{\|}\,|\psi_0\rangle$$

$$\hat{p} - \frac{iq}{\hbar}\underbrace{[\hat{x},\hat{p}]}_{i\hbar} + 0$$

$$= \hat{p} + q\mathbb{1} .$$

$$\rightarrow \langle p\rangle_{\psi_1} = \langle p\rangle_{\psi_0} + q \;. \quad \boxtimes$$

Letzte Vorlesung: Spin-Messung mittels Stern-Gerlach-Magnet

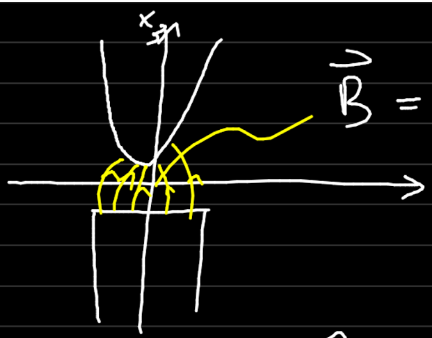


$P_{z+} = |\langle z+|\chi\rangle|^2$

$P_{z-} = |\langle z-|\chi\rangle|^2$

$$|\Psi_0\rangle = |\varphi_0\rangle \otimes \underbrace{(\chi_+|z+\rangle + \chi_-|z-\rangle)}_{|\chi\rangle} \;\hat{=}\; \varphi_0(x)\begin{pmatrix}\chi_+\\ \chi_-\end{pmatrix}$$

$$\langle\hat{\vec{x}}\rangle_{\varphi_0} = \vec{0}, \quad \langle p_1\rangle_{\varphi_0} = m v_0, \quad \langle p_2\rangle_{\varphi_0} = \langle p_3\rangle_{\varphi_0} = 0$$



$$\vec{B} = \left(B_0 + \frac{\partial B}{\partial x_3} \cdot x_3\right) \vec{e}_3$$

$$\underline{\underline{H = H_0 + V}}$$

$$\rightarrow \quad H_0 = \frac{|\hat{\vec{p}}|^2}{2m} - \mu_0 B_0 \hat{S}_3$$

$$V = \underbrace{-\mu_0 \frac{\partial B}{\partial x_3}}_{=\alpha} \hat{x}_3 \hat{S}_3 \equiv \underline{\underline{\alpha \hat{X}_3 \hat{S}_3}}$$

$$\tau = L/v_0$$

$\rightarrow$ Dynamik (WW-Bild):

$$|\Psi_0\rangle \xrightarrow[U(t)]{t>\tau} |\Psi(t)\rangle =$$

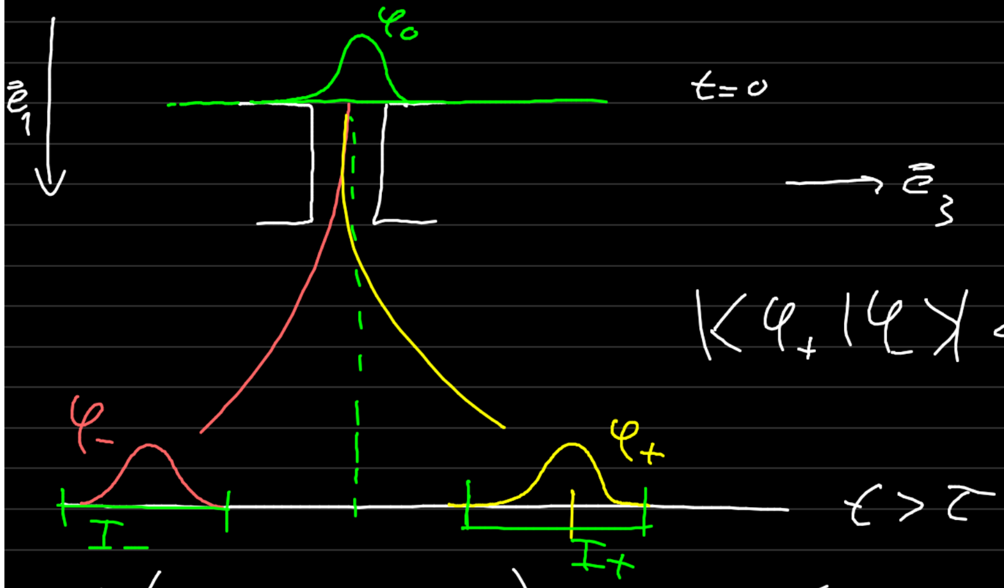
$$\underbrace{e^{-iH_0 t/\hbar}}_{U_0(t)} \tilde{T}_3(-\alpha \hat{S}_3 \tau)\, T_3\!\left(\frac{\alpha \hat{S}_3 \tau^2}{2m}\right) |\Psi_0\rangle$$

$$|\varphi_0\rangle|z+\rangle \xrightarrow{U(t)} |\varphi_t\rangle|z+\rangle =$$

$$= U_0(t)\,\tilde{T}_3\Big(\underbrace{-\frac{\alpha\hbar\tau}{2}}_{q}\Big)\,T_3\Big(\underbrace{\frac{\alpha\hbar\tau^2}{4m}}_{-a}\Big)|\varphi_0\rangle|z+\rangle$$

$$|\varphi_+\rangle|z+\rangle = \underbrace{U_0(t)\,\hat{T}_3(q)\,T_3(-a)\,|\varphi_0\rangle}_{|\varphi_+\rangle}|z+\rangle$$

$$|\varphi_0\rangle|z-\rangle \xrightarrow{U(t)} |\varphi_-\rangle|z-\rangle = U_0\,\tilde{T}_3(-q)\,T_3(+a)\,|\varphi_0\rangle|z-\rangle$$



$$|\langle\varphi_+|\varphi_-\rangle| \ll 1$$

$$|\varphi_0\rangle\left(\chi_+|z+\rangle + \chi_-|z-\rangle\right) \xrightarrow{U(t)} \chi_+|\varphi_+\rangle|z+\rangle + \chi_-|\varphi_-\rangle|z-\rangle = |\Psi(t)\rangle$$

Ortsmessung zur Zeit $t\ (>\tau)$:

„Teilchen in I_+":

$$P_+ = \int_{I_+} dx\, \|\Psi(x)\|^2$$

$$= \int_{I_+} dx \left(|\varphi_+(x)|^2|\chi_+|^2 + |\varphi_-(x)|^2|\chi_-|^2\right)$$

$$= |\chi_+|^2 \cdot \underbrace{\int_{I_+} dx\, |\varphi_+(x)|^2}_{=1} = |\chi_+|^2$$

"Teilchen in I_-":

$$P_- = \int_{I_-} dx\, \|\psi(x)\|^2 = \dots = |\chi_-|^2$$

Zusammenfassung:

I) direkt: $|\chi\rangle = \chi_+|z+\rangle + \chi_-|z-\rangle$

$\xrightarrow{\text{Messpost.}}$ Spin $\quad P_{\pm}^{(I)} = |\langle z\pm|\chi\rangle|^2 = \chi_{\pm}^2$ ✓

II) indirekt

$|\varphi_0\rangle(\chi_+|z+\rangle + \chi_-|z-\rangle)$

$\xrightarrow{\text{Dynamik}} \underbrace{\chi_+|\varphi_+\rangle}|z+\rangle + \underbrace{\chi_-|\varphi_-\rangle}|z-\rangle$

$\xrightarrow{\text{Messpostulat}}$ Ort $\quad P_{\pm}^{(II)} \overset{!}{=} |\chi_{\pm}|^2 \overset{!}{=} P_{\pm}^{(I)}$