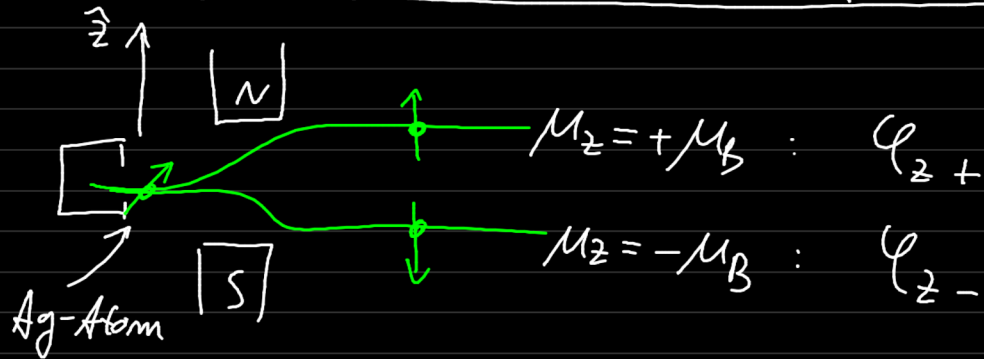
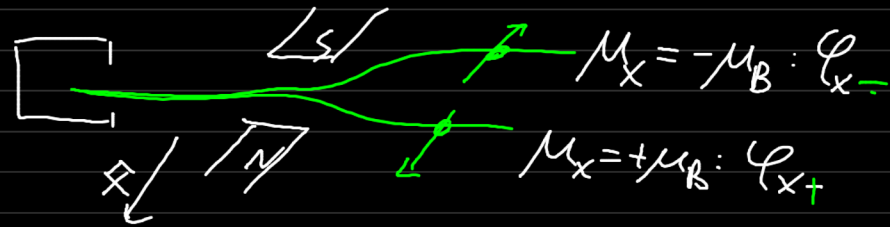


Wdhlg. Stern-Gerlach Experiment



Messung der z-komp. des mag. Mom.

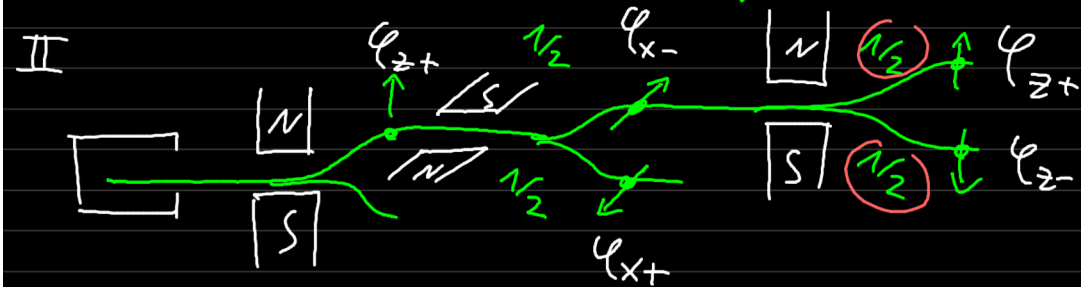
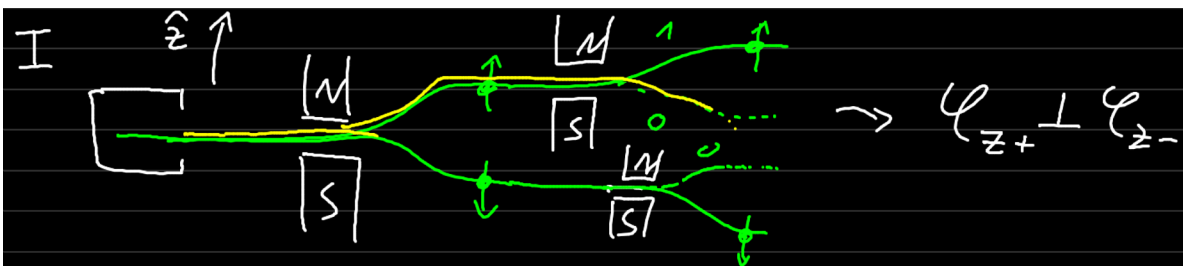
$$\mu_B = \frac{h e}{2 m_e} : \text{Bohrsches Magneton}$$



analog: $\hat{y}$ -Richt: $M_y = -\mu_B : \varphi_{y-}$
 $M_y = +\mu_B : \varphi_{y+}$

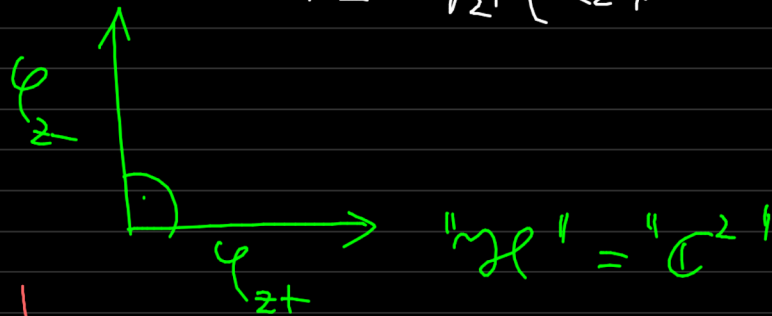
kombinierte Experimente

(Schematisch,
 idealisiert,
 vgl Feynman
 Lecture Notes III)



$$\rightarrow \varphi_{x\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{z+} \pm \varphi_{z-})$$

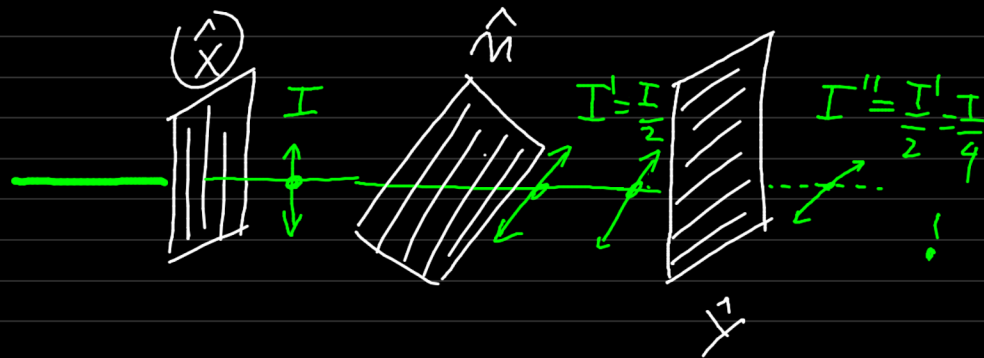
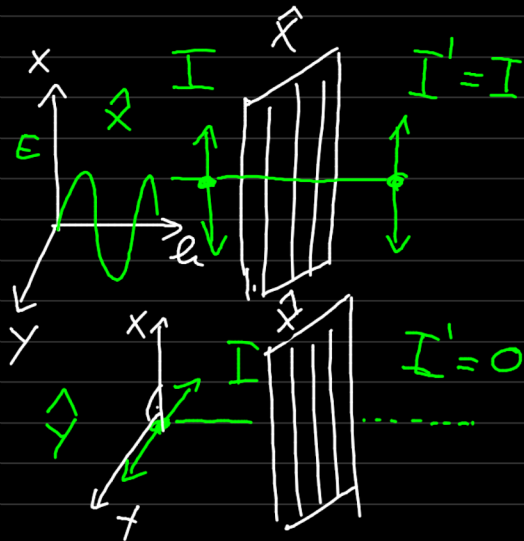
$$\varphi_{y\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{z+} \pm i \varphi_{z-})$$



$$\rightarrow |\langle \varphi_{z\pm}, \varphi_{x\pm} \rangle|^2 = \frac{1}{2} = |\langle \varphi_{z\pm}, \varphi_{y\pm} \rangle|^2 = |\langle \varphi_{y\pm}, \varphi_{x\pm} \rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

Analogie: polarisiertes Licht

S.-G.-Exp $\longleftrightarrow$ Streuung an Polarisationsfiltern



$$\hat{n} = \frac{\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{2}}$$

Observablen und hermitesche Operationen

Observable = observierbare Variable
↓
= messbare Größen!

Beisp: M_z : z-komp des mag. Moments
= eines Ag-Atoms

→ messbar mittels S-G-Mag. ✓

→ mögliche Messergebnisse: $+\mu_B, -\mu_B$
(mit Sicherheit) im Zust: ψ_{z+}, ψ_{z-}

Messung von M_z an System
im allg. Zustand ψ .

$+\mu_B$ mit Wkt. $P_+ = |\langle \psi_{z+}, \psi \rangle|^2$

$-\mu_B$: " " $P_- = |\langle \psi_{z-}, \psi \rangle|^2$

Erwartungswert:

von M_z im Zustand ψ :

$$\langle M_z \rangle_\psi = \mu_B P_+ + (-\mu_B) P_-$$

$$\rightarrow \langle \mu_z \rangle_\psi = \mu_B |\langle \varphi_{z+}, \psi \rangle|^2 + (-\mu_B) |\langle \varphi_{z-}, \psi \rangle|^2$$

2. Umformulierung mit geeigneter Kernoperator!

Erinnerung: lin Abb. $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ hermitesch
(selbstadjung.)

$$\text{g.d.w. } A^\dagger = A$$

$$(\Leftrightarrow) \langle \varphi, A\psi \rangle = \langle A\varphi, \psi \rangle \quad \text{für alle } \varphi, \psi$$

A hermitesch $\rightarrow A$ diagonalisierbar!

$\rightarrow$ ON Eigenbasis: $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$
mit reellen Ewa: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

$$\text{d.h. } A\varphi_i = \lambda_i \varphi_i$$

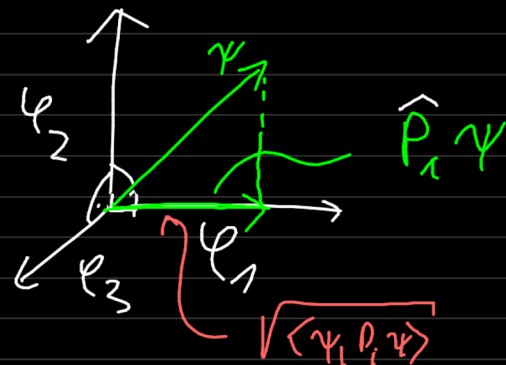
$${}_B A_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Spektラルzerlegung:

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \hat{P}_i$$

EW zum EV $\uparrow$ Projektor auf φ_i

$$\hat{P}_i \varphi_j = \begin{cases} \varphi_i & : i=j \\ 0 & : i \neq j \end{cases} \rightarrow \hat{P}_i \psi = \langle \varphi_i, \psi \rangle \varphi_i$$



$$\stackrel{(*)}{\langle \psi, \hat{P}_i \psi \rangle = |\langle \varphi_i, \psi \rangle|^2}$$

$$\langle \psi, \langle \varphi_i, \psi \rangle \varphi_i \rangle = \langle \varphi_i, \psi \rangle \underbrace{\langle \psi, \varphi_i \rangle}_{= \langle \varphi_i, \psi \rangle^*}$$

{ Observable μ_z
 mögl. Messw. $+\mu_B, -\mu_B$
 in Zuständen $\varphi_{z+}, \varphi_{z-} \in \mathbb{C}^2$
 hermm. Operator $\hat{\mu}_z : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$
 Eigenw. $+\mu_B, -\mu_B$ zu Eigen-
 vektoren $\varphi_{z+}, \varphi_{z-}$
 $\langle \mu_z \rangle_\psi = \mu_B P_+ - \mu_B P_-$

$\rightarrow$ d.h. $\hat{\mu}_z = \mu_B \hat{P}_+ - \mu_B \hat{P}_-$
 $\uparrow$
 projekt. auf φ_{z+}

Wozu?

$$\begin{aligned}
 \langle \psi, \hat{\mu}_z \psi \rangle &= \langle \psi, (\mu_B \hat{P}_+ - \mu_B \hat{P}_-) \psi \rangle \\
 &= \mu_B \underbrace{\langle \psi, \hat{P}_+ \psi \rangle}_{\parallel \varphi_{z+} \parallel^2} - \mu_B \underbrace{\langle \psi, \hat{P}_- \psi \rangle}_{\parallel \varphi_{z-} \parallel^2} \\
 &= \mu_B \underbrace{|\langle \varphi_{z+}, \psi \rangle|^2}_{P_+} - \mu_B \underbrace{|\langle \varphi_{z-}, \psi \rangle|^2}_{P_-}
 \end{aligned}$$

$$\langle M_z \rangle_\psi = \langle \psi, \hat{M}_z \psi \rangle$$

2. Postulat (Messpostulat, allg. Vers.)

• Observable $A \triangleq$ herm. Op. $\hat{A}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$

→ mögl. Messwerte $\leftrightarrow$ Eigenwerte

$a_1, a_2, \dots, a_n$

(mit Wkt. 1) gemessen

in Eigenzuständen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$

$a_1, \dots, a_n$

zu Eigenvektoren

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$

• Messung der Obs. A am System im Zustand ψ ergibt Messwert a_i mit Wkt.

$$p_i = |\langle \varphi_i, \psi \rangle|^2$$

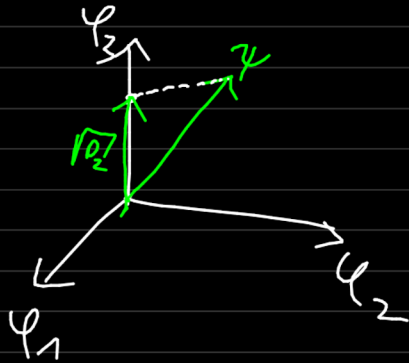
$$(\langle \psi, \hat{P}_i \psi \rangle)$$

↑
Projektor
auf φ_i

→ Erwartungswert
von A im Zust. ψ :

$$\langle A \rangle_\psi = \langle \psi, \hat{A} \psi \rangle$$

- bei idealer Messung von A an System im Zustand ψ ist nach Messung mit Ergebnis a_i System im Zustand $\psi = \varphi_i$



Dirac-Notation
 (zur Vereinfachung des QM Formalis)
Vektoren

$\mathcal{H} \ni \varphi$	$ \varphi\rangle$ "ket φ "
$\psi = \alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2$	$ \psi\rangle = \alpha \varphi_1\rangle + \beta \varphi_2\rangle$
$\psi = \sum_i a_i \varphi_i$	$ \psi\rangle = \sum_i a_i \varphi_i\rangle$
Op. $\hat{A}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ $\hat{A}\varphi$	$\hat{A} \psi\rangle$

Dualraum, Dualvektoren

↳ Dualraum $\mathcal{H}^*$ zu $\mathcal{H}$

= Vektorraum der lin. Abb. $\mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$

Isomorphismus: $\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}^*$
 $\varphi \longmapsto \varphi^+$
"antilinear!"
 φ^+ ist Dualvektor zu φ

def. durch

$$\mathbb{C} \ni \underbrace{\varphi^+}_{\in \mathcal{H}^*} \psi := \langle \varphi, \psi \rangle$$

↳ Eigenschaften:

$$a \quad (\varphi_1 + \varphi_2)^+ = \varphi_1^+ + \varphi_2^+$$

$$b \quad \underbrace{(\alpha \varphi)^+}_{\in \mathcal{H}^*} = \alpha^* \varphi^+$$

Anwendung:

1) $\varphi \in \mathcal{H}$, Projection auf φ : $\hat{P}_\varphi$
 $\|\varphi\|=1$

$$\hat{P}_\varphi \psi = \langle \varphi, \psi \rangle \varphi$$

$$= (\varphi^\dagger \psi) \cdot \varphi = \varphi (\varphi^\dagger \psi)$$

$$= \underline{\underline{(\varphi \varphi^\dagger)}} \psi$$

d.h.

$$\hat{P}_\varphi = \varphi \varphi^\dagger$$