

Bspe. / Anwendungen:

1) $\hat{P}_\varphi = \varphi \varphi^+$

2) in Komponenten bzgl ONB B

$$\varphi_B = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n, \quad \psi_B = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

$\exists \exists \varphi, \psi$

$$\Rightarrow \varphi^+ \psi \stackrel{\text{Def}}{=} \langle \varphi, \psi \rangle = \sum_{i=1}^n \varphi_i^* \psi_i$$

$$= \underbrace{(\varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots, \varphi_n^*)}_{\varphi_B^+} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \stackrel{||}{=} \varphi_B^+ \psi_B$$

$$= \varphi_B^+ \psi_B$$

$$\in \mathbb{C}!$$

3) analog: ONB B

$$\begin{aligned} {}_B(\hat{P}_\varphi)_B &= ({}_\varphi\varphi^+)_B = \varphi_B \varphi_B^+ \\ &= \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} \cdot (\varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots, \varphi_n^*) \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{n \times n \text{ Matrix!}} \end{aligned}$$

op. $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$

$$(A\varphi)^+ = \varphi^+ A^+$$

$$\begin{aligned} \left[\underline{(A\varphi)^+} \psi \right] &\stackrel{\text{Def.}}{=} \langle \overset{+}{A\varphi}, \psi \rangle = \langle \varphi, A^+ \psi \rangle \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} \varphi^+ (A^+ \psi) = \underline{(\varphi^+ A^+)} \psi \end{aligned}$$

Dualvektoren in Dirac-Notation

$$\mathcal{H}^* \ni \varphi^+ \longleftrightarrow \langle \varphi | : \text{"bra } \varphi"$$

$$\rightarrow \varphi^+ \psi \longleftrightarrow \langle \varphi | \psi \rangle$$

$$\langle \varphi | \quad | \psi \rangle \quad \equiv \langle \varphi | \psi \rangle = \langle \varphi, \psi \rangle$$

"bra": "ket"
= "bracket"

Bsp:

$$\bullet \varphi^+ A \psi \longleftrightarrow \langle \varphi | A | \psi \rangle = \langle \varphi, A \psi \rangle$$

$$\bullet \hat{P}_\varphi = \varphi \varphi^+ \longleftrightarrow \hat{P}_\varphi = |\varphi\rangle \langle \varphi|$$

$$P_\varphi \psi \longleftrightarrow |\varphi\rangle \langle \varphi | \psi \rangle = \langle \varphi, \psi \rangle \varphi$$

• Zerlegung der Eins

ONB $B = (|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \dots, |\varphi_n\rangle)$

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n \gamma_i |\varphi_i\rangle = \sum_{i=1}^n \langle \varphi_i | \psi \rangle |\varphi_i\rangle$$

$$\gamma_i = \langle \varphi_i | \psi \rangle$$

$$= \sum_i |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i | \psi \rangle = \left(\sum_i |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i| \right) |\psi\rangle$$

$$|\psi\rangle = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i| \right)}_{\mathbb{1}_{\mathcal{H}}} |\psi\rangle$$

$$\mathbb{1}_{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^n |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i|$$

↑
für bel. ONB $|\varphi_1\rangle, \dots, |\varphi_n\rangle$

Anwendung: Darst. eines Op $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$
bzgl. ONB $|\varphi_1\rangle, \dots, |\varphi_n\rangle$

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{1}_{\mathcal{H}} A \mathbb{1}_{\mathcal{H}} = \left(\sum_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \right) A \left(\sum_j |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j| \right) \\ &= \sum_{ij} |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| A |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j| \end{aligned}$$

$$\boxed{A = \sum_{ij} \langle\varphi_i| A |\varphi_j\rangle \cdot |\varphi_i\rangle\langle\varphi_j|} \quad (*)$$

(Anwendung: Üb 9 1c)

Falls A diagonalisierbar
und $|\varphi_1\rangle, \dots, |\varphi_n\rangle$
Eigenbasis:

$$\langle\varphi_i| A |\varphi_j\rangle = \underbrace{\langle\varphi_i|}_{a_j} \underbrace{a_j}_{|\varphi_j\rangle}$$

$$= a_j \underbrace{\langle\varphi_i|\varphi_j\rangle}_{\delta_{ij}} = a_i \delta_{ij}$$

$$\langle \varphi_i | A | \varphi_j \rangle = a_i \delta_{ij}$$

$$\rightarrow \boxed{A = \sum_i a_i |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i|}$$

↑
Spektラルdarstellung) $\hat{P}_{\varphi_i}$

Quantenmechanischen Dynamik

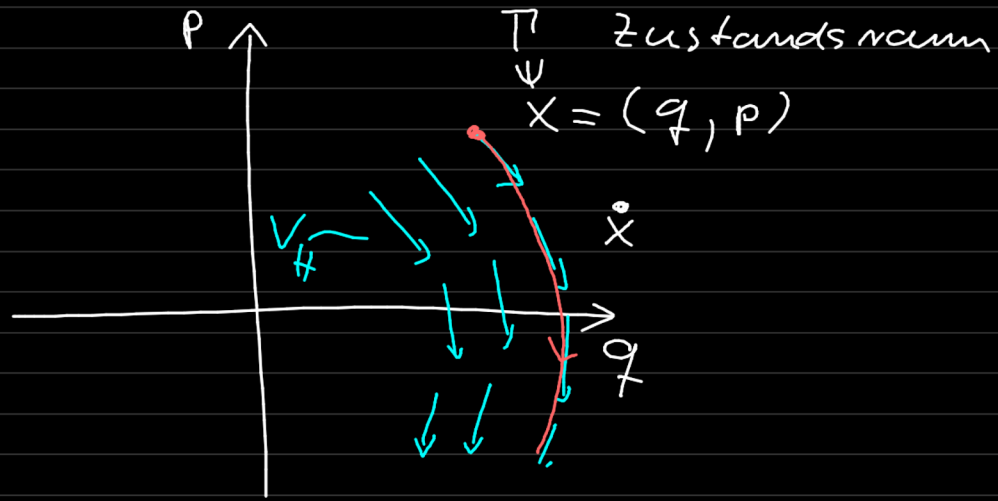
zeitliche Entwicklung eines
qm. Zustands:

$$\psi(0) \xrightarrow{\epsilon} \psi(\epsilon)$$

$t=0$ $\sum_{i=1}^{\infty}$

Erinnerung: klass. Mechanik
abgeschl., konservatives System

→ Hamiltonsche Mechanik



Hamilton-Fkt: $H(q, p)$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right)(x)$$

$\parallel$

$$\dot{x} = V_H(x)$$

Hamilton-Fkt generiert
die Dynamik

QM postuliert: Zeitentwicklung

über Zeitintervall $[0, t]$,

$$\psi(0) \longmapsto \psi(t) \stackrel{!}{=} U_t \psi(0)$$

ist gegeben durch linearem Operator

$$U_t: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

Zeitentwicklungsoperator

warum linear?

- passt sehr gut zu 1.+2. Pos!
- zutreffend! (Experimente)
- ~~nicht-lineare~~ Zeitentw.
(+ 1. und 2. Postulat)
→ Überlichtgeschw.-Signal
→ ~~Widerspruch zu SRT!~~

(Simon, Busch, Gisin, 2001)

→ Eigenschaften des Z.E Op. U_t :

1) $U_0 = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$

2) U_t ist normerhaltend!

$$\|\psi(t)\| = 1 = \|\psi(0)\|$$

$$\parallel \parallel$$
$$\|U_t \psi(0)\|$$

d.h. U_t unitär!

$$U_t U_t^\dagger = U_t^\dagger U_t = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$$

3) "Isotropie der Zeit".

$$\psi(t_1) \xrightarrow{t} \psi(t_1+t) = U_t \psi(t_1)$$

$$\boxed{U_{t_2} U_{t_1} \stackrel{!}{=} U_{t_2+t_1}}$$

$$\underline{U_{t_2}} \underline{U_{t_1}} \underline{\psi(0)} = U_{t_2} \psi(t_1) = \psi(t_2+t_1) = \underline{U_{t_2+t_1}} \underline{\psi(0)}$$

Folgerungen aus 1) - 3):

$$4) \quad \mathbb{1}_x = U_0 = U_{t-t} \stackrel{3)}{=} U_t U_t$$

$$\rightarrow U_{-t} = U_t^{-1} \stackrel{2)}{=} U_t^+$$

$$\boxed{U_{-t} = U_t^+}$$

5) zeitliche Ableitung von U_t zur
Zeit $t=t_0$ (U_t differenzierbar!)

$$\dot{U}_{t_0} = \left. \frac{d}{dt} U_{t+t_0} \right|_{t=0}$$

$$\stackrel{3)}{=} \left. \frac{d}{dt} (U_t U_{t_0}) \right|_{t=0}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{d}{dt} U_t \right)}_{t=0} U_{t_0}$$

$\boxed{=}$ unabhängig!

$$\boxed{\mathcal{I} = \left. \frac{dU}{dt} \right|_{t=t_0}}$$

$$\rightarrow \dot{U}_t = J U_t$$

d.h. U_t genügt der lin DGL 1. Ord
mit Anfangsbed. $U_0 = 1_{\mathbb{R}}$

$$\rightarrow U_t = 1_{\mathbb{R}} e^{Jt}$$

$$U_t = e^{Jt}$$

$$\dot{y} = ay$$

$$\hookrightarrow y_t = e^{at}$$

zum Akr

J generiert $y_0 = 1$
die Zeitentr. U_t !

physikalische Bedeutung von J ?

$$U_{-t} \stackrel{4)}{=} U_t^+$$

$$\underline{e^{-Jt}} = (e^{Jt})^+ = e^{\underline{J^+t}}$$

$$\Leftrightarrow -J = J^+ \quad \text{anti-hermitisch}$$

$$\rightarrow \tilde{H} := iJ \quad \text{hermitisch!}$$

$$\tilde{H}^+ = (iJ)^+ = (-i)(-J) = iJ = \tilde{H}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \bullet U_t = e^{-i\tilde{H}t} : \tilde{H} \text{ gen. entw. Zeitentw.} \\ \bullet H \text{ hermitesch} \hat{=} \tilde{H} \text{ Observable} \end{array} \right.$$

$\rightarrow \tilde{H} \hat{=} \text{Energie-Observable}$
 "Hamilton-Operator"

$$[\tilde{H}] = \frac{1}{\text{Zeit}}$$

$\rightarrow$ richtige Dimension + quantitative
 Übereinstimmung mit Ex1.

$$\boxed{H := \hbar \tilde{H} = i \hbar \left[\frac{d}{dt} U_t \right]_{t=0}}$$

3. Postulat

Die g.m. Zeitentwicklung
 ist gegeben durch den
 Zeitentwicklungsoperator

$$\boxed{U_t = e^{-iHt/\hbar}}$$

$$\rightarrow \psi(t_1 + t) = e^{-iHt/\hbar} \psi(t_1)$$

$\rightarrow U_t$ und $\psi(t)$ genügen Schrödinger-Gleichung:

$$\dot{U}_t = -\frac{i}{\hbar} H U_t$$

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{i}{\hbar} H \psi(t)$$

mit Hamilton-Operator $H \hat{=} \text{Energie}$
-Observable.