

Wdhlg: Dirac

$$\psi \rightarrow |\psi\rangle \quad \longleftrightarrow \quad \text{"ket"}$$

$$\psi^* \rightarrow \langle\psi| \quad \longleftrightarrow \quad \text{"bra"}$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi, \psi\rangle$$

"bracket"

$$\bullet (\alpha|\psi\rangle)^+ = \alpha^* \langle\psi|$$

$$\bullet (A\psi)^+ = \langle\psi|A^+$$

$$\bullet \langle\psi|A|\psi\rangle^* = \langle\psi|A^+|\psi\rangle$$

$$\bullet (|\psi\rangle\langle\psi|)^+ = |\psi\rangle\langle\psi|$$

Quantenmechanische

Dynamik :

$$\psi(t_0) \xrightarrow[t]{U_t} \psi(t_0+t)$$

"U_t ψ(t₀)"

lineare Abbildung!

• Zerlegung der Eins $\mathbb{B}$
 ONB $(|\varphi_1\rangle, \dots, |\varphi_n\rangle)$ von $\mathcal{H}$

$$\rightarrow \boxed{\mathbb{1}_{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^n |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow |\psi\rangle &= \mathbb{1}_{\mathcal{H}} |\psi\rangle = \left(\sum_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \right) |\psi\rangle \\ &= \sum_i |\varphi_i\rangle \underbrace{\langle\varphi_i|\psi\rangle}_{\psi_i} \end{aligned}$$

Op. $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{1}_{\mathcal{H}} A \mathbb{1}_{\mathcal{H}} \\ &= \left(\sum_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \right) A \left(\sum_j |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j| \right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i,j} \underbrace{\langle\varphi_i| A |\varphi_j\rangle}_{A_{ij}} |\varphi_i\rangle\langle\varphi_j|$$

$$\left[\begin{array}{c} {}_B A_B = (A_{ij}) \end{array} \right]$$

→ 3. Postulat

Zeitentwicklungsoper. U_t

$$\psi(t+t_0) = U_t \psi(t_0)$$

mit

$$U_t = e^{\uparrow -iHt/\hbar}$$

Hamilton-Operator

$\hat{=}$ Energie-Observable
des Systems

→ Schrödingergleichungen:

$$\dot{U}_t = -\frac{i}{\hbar} H U_t$$

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{i}{\hbar} H \psi(t)$$

2. Eigenschaften:

1) $U_0 = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$

2) U_t unitär!

3)

$$3) \quad U_{t_2} U_{t_1} \stackrel{!}{=} U_{t_2+t_1}$$

$$4) \quad \hookrightarrow U_t = e^{\mathcal{J}t} \equiv e^{-iHt/\hbar}$$

„Hamiltonop. generiert 2. E.“

$$5) \quad U_{-t} = U_t^{-1} = U_t^\dagger$$

$$\mathcal{J} = \frac{dU}{dt} \rightarrow \mathcal{J}^\dagger = -\mathcal{J}$$

$$H = i\mathcal{J}\hbar$$

$$\hookrightarrow H^\dagger = H$$

$$\left. \frac{dU_t}{dt} \right|_{t_0} = \left. \frac{d}{dt} (U_{t_0+t}) \right|_{t=0}$$

$$\stackrel{3)}{=} \underbrace{\left(\left. \frac{d}{dt} U_t \right|_{t=0} \right)}_{=: \mathcal{J}} U_{t_0}$$

Def: Observable A ist
Erhaltungsgröße

$\Leftrightarrow$

$$\langle A \rangle_{\psi(t)} = \text{const!}$$

für alle Lösungen der
Schröd. G. $\psi(t)$

Def: Kommutator zweier Operatoren
 $A, B: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$: $[A, B] = AB - BA$

Kriterium für A Erhaltungs-
größe:

$$\langle A \rangle_{\psi(t)} = \langle \psi(t), A \psi(t) \rangle$$

$$= \langle U_t \psi_0, A U_t \psi_0 \rangle$$

$$= \langle \psi_0, U_t^\dagger A U_t \psi_0 \rangle$$

$$= \langle \psi_0, e^{+iHt/\hbar} A e^{-iHt/\hbar} \psi_0 \rangle$$

$U_t = e^{-iHt/\hbar}$ falls $[H, A] = 0$

Wenn (!) $HA = AH$

d.h. $[H, A] = 0$

$$\rightarrow H^n A = A H^n \rightarrow e^{iHt/\hbar} A = A e^{iHt/\hbar}$$

$$(\rightarrow [U_t, A] = 0)$$

$$\rightarrow \langle A \rangle_{\psi(t)} = \langle \psi_0, A \psi_0 \rangle = \langle A \rangle_{\psi_0}$$

konstant!

damit gezeigt.

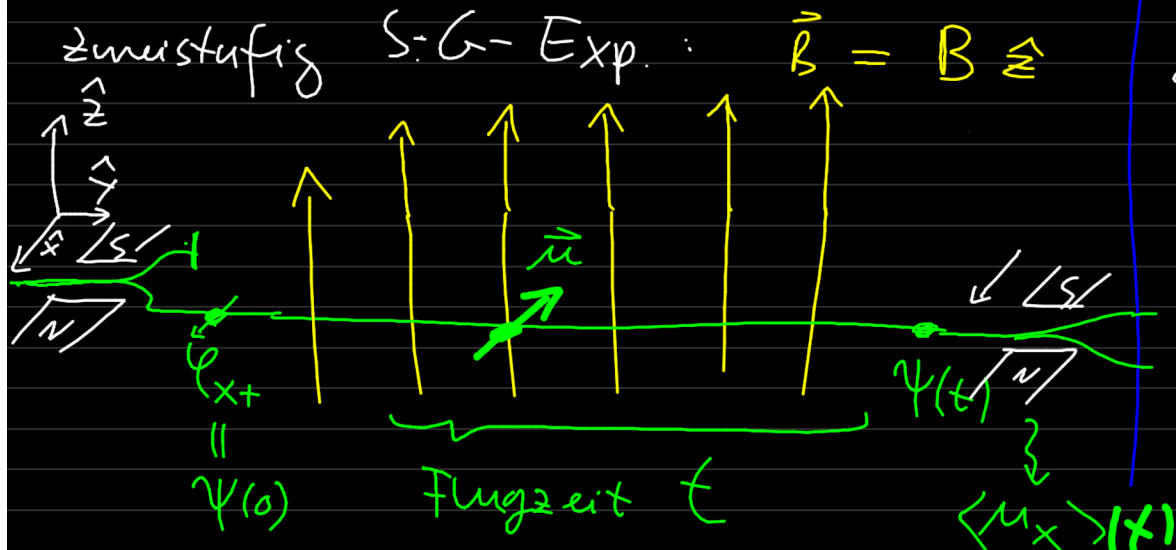
$[H, A] = 0$
 $\Leftrightarrow$ A Erhaltungsgröße
(*)

(*) Übung:

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle_{\psi(t)} \stackrel{!}{=} \left\langle \frac{i}{\hbar} [H, A] \right\rangle_{\psi(t)}$$

Elementares Bsp.:

mag. Moment eines Ag-Atoms
($\hat{=}$ Spin) im homog. B-Feld



Energie eines mag. Mom. $\vec{\mu}$
im B-Feld:

$$E = -\vec{B} \cdot \vec{\mu} = -B \mu_z$$

Hamilton op.:

$$\hat{H} = -B \hat{\mu}_z = -B \mu_B \sigma_z$$

$$\hat{\mu}_z = \mu_B \sigma_z$$

(Aufgabe 8)

→ Zeitentw.op:

$$U_t = e^{-iHt/\hbar} = e^{i \frac{B_{MB}}{\hbar} t \sigma_3}$$

mit Larmorfrequenz: $\omega := 2 \frac{B_{MB}}{\hbar}$

$$U_t = e^{i \frac{\omega}{2} t \sigma_3} \stackrel{\text{Aufg. 5)}}{=} \mathbb{1}_2 \cos\left(\frac{\omega}{2} t\right) + i \sigma_3 \sin\left(\frac{\omega}{2} t\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\omega}{2} t\right) + i \sin\left(\frac{\omega}{2} t\right) & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\omega}{2} t\right) - i \sin\left(\frac{\omega}{2} t\right) \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow U_t = \begin{pmatrix} e^{+i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t/2} \end{pmatrix}$$

$$\psi(0) = \psi_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \psi(t) = U_t \psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{+i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\omega t/2} \\ e^{i\omega t/2} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \langle M_x \rangle_{\psi(t)} = \langle \psi(t), \hat{M}_x \psi(t) \rangle$$

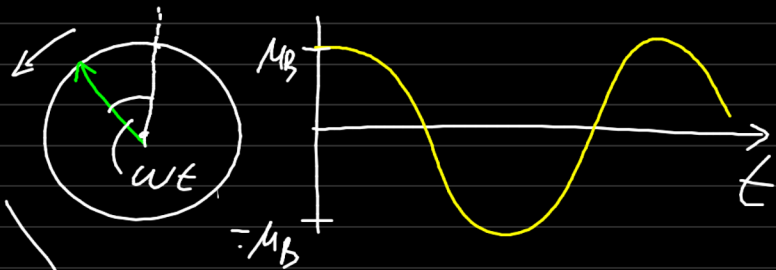
$$\stackrel{\uparrow}{=} \frac{\mu_B}{2} \left\langle \begin{pmatrix} e^{i\omega t/2} \\ e^{-i\omega t/2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\omega t/2} \\ e^{-i\omega t/2} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\hat{M}_x \stackrel{\uparrow}{=} \mu_B \hat{\sigma}_x$$

aufg. 8

$$= \frac{\mu_B}{2} (e^{-i\omega t} + e^{+i\omega t})$$

$$\boxed{\langle M_x \rangle_{\psi(t)} = \mu_B \cos(\omega t)}$$



"Larmor präzession"

$$e^{\pm i\omega t} = e^{\overbrace{i(\pm \frac{\hbar}{2})t}^H \frac{1}{\hbar}}$$

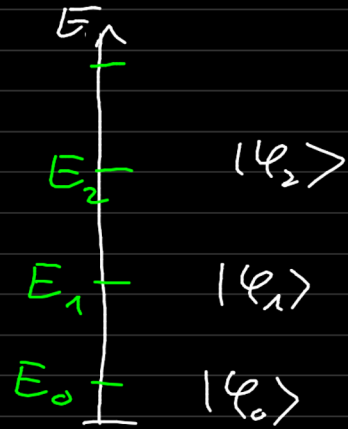
Allgemeine Aussagen zur z. G.

Energiedarstellung von H und U_t :

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} E_n |\varphi_n\rangle \langle \varphi_n|$$

d.h.: H besitzt Energieeigenwerte
=Eigenenergien $E_0 < E_1 < E_2 < \dots$

zu Energieeigenzust. $|\varphi_0\rangle, |\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \dots$
(bilden ONB)



↗
Spektrum von H

Zeitentr von U_t in Energiedarstellung

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\frac{-i}{\hbar} H t \right)^l |\psi_n\rangle = \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\frac{-i}{\hbar} E_n t \right)^l \right] |\psi_n\rangle$$

$$e^{-i H t / \hbar} = U_t$$

$$e^{-i E_n t / \hbar}$$

$$U_t |\psi_n\rangle = e^{-i E_n t / \hbar} |\psi_n\rangle$$

d.h. $|\psi_n\rangle$ EV von U_t zum EV $e^{-i E_n t / \hbar}$

$$U_t = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i E_n t / \hbar} |\psi_n\rangle \langle \psi_n|$$

$$\rightarrow |\psi(t)\rangle = U_t |\psi(0)\rangle$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i \frac{t}{\hbar} E_n} \langle \psi_n | \psi(0) \rangle |\psi_n\rangle$$

$$\Gamma A = \sum a_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \rfloor$$

→ 1) Energieeigenzustände
sind stationäre Zustände

für bel. Obs. A und $\psi(0) = \varphi_n$.

ist $\langle A \rangle_{\psi(t)} = \langle A \rangle_{\varphi_n}$ konstant

$$\psi(t) = U_t \varphi_n = e^{-iE_n t/\hbar} \varphi_n \quad \langle \varphi_n | A | \varphi_n \rangle$$

$$\rightarrow \langle A \rangle_{\psi(t)} = e^{+iE_n t/\hbar} e^{-iE_n t/\hbar} \underbrace{\langle \varphi_n | A | \varphi_n \rangle}_{\text{stationär}}$$

2) Superposition zweier Energie-
Eigenzust. $|\varphi_n\rangle$ und $|\varphi_m\rangle$

→ oszillierende Erwartungs-
werte, Frequenz.

$$\omega = \frac{\Delta E}{\hbar} = \frac{|E_n - E_m|}{\hbar}$$

"Quantenschwung"

$$|\psi(0)\rangle = \alpha |\varphi_n\rangle + \beta |\varphi_m\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = \alpha e^{-iE_n t/\hbar} |\varphi_n\rangle + \beta e^{-iE_m t/\hbar} |\varphi_m\rangle$$

$$\rightarrow \langle A \rangle_{\psi(t)} = \langle \alpha e^{-iE_n t/\hbar} \varphi_n + \beta e^{-iE_m t/\hbar} \varphi_m \rangle$$

$$= \underbrace{|\alpha|^2 \langle A \rangle_{\varphi_n} + |\beta|^2 \langle A \rangle_{\varphi_m}}_{a} + \alpha^* \beta e^{i(E_n - E_m)t/\hbar} \langle \varphi_n | A | \varphi_m \rangle + \alpha \beta^* e^{-i(E_n - E_m)t/\hbar} \langle \varphi_m | A | \varphi_n \rangle$$

$$\rightarrow \alpha^* \beta \langle \varphi_n | A | \varphi_m \rangle = \frac{b}{2} e^{i\varphi}$$

$$+ \alpha^* \beta e^{i(E_n - E_m)t/\hbar} \langle \varphi_n | A | \varphi_m \rangle + \alpha \beta^* e^{-i(E_n - E_m)t/\hbar} \langle \varphi_m | A | \varphi_n \rangle^*$$

$$\rightarrow \langle A \rangle_{\psi(t)} = a + \operatorname{Re} b e^{i\varphi + i \frac{(E_n - E_m)t}{\hbar}}$$

$$\boxed{\langle A \rangle_{\psi(t)} = a + b \cos\left(\frac{E_n - E_m}{\hbar} t + \varphi\right)}$$