

Wahlg.:

$$\hat{x} |\varphi_x\rangle = x |\varphi_x\rangle$$

Ortsop. Ortseigenzust. Eigenwert

$\{ |\varphi_x\rangle \}_{x \in \mathbb{R}}$ orthonormal: $\langle \varphi_x | \varphi_{x'} \rangle = \delta(x-x')$

und vollständig: $\mathbb{1}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} dx |\varphi_x\rangle \langle \varphi_x|$

Wellenfkt. eines Teilchens im Zustand $|\psi\rangle$

$$\psi(x) := \langle \varphi_x | \psi \rangle \rightarrow |\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) |\varphi_x\rangle$$

$\rightarrow$ Aufenthaltswkts.-dichte: $|\psi(x)|^2$

$\rightarrow$ Wkt., dass $x \in [x_1, x_2]$:

$$p = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx$$

Skalarprodukt:

$$\langle \psi | \chi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \chi(x) dx$$

$$|\psi\rangle \xrightarrow{f(x)} |\tilde{\psi}\rangle$$

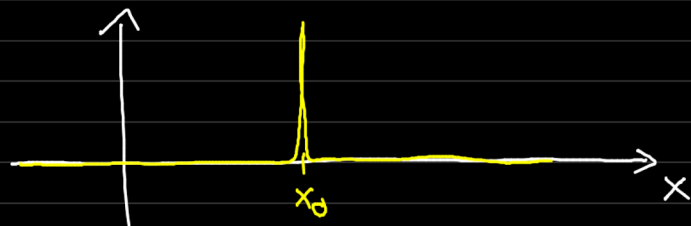


$$\psi(x) \xrightarrow{f(x)} \tilde{\psi}(x) = x \psi(x)$$

$f(x) \cdot \psi(x)$

Wellenfkt. des EZ. $|\varphi_{x_0}\rangle$:

$$\varphi_{x_0}(x) = \langle \varphi_x | \varphi_{x_0} \rangle = \delta(x - x_0)$$



QM eines Teilchens im 3D-Raum
analog!

1D $\longrightarrow$ 3D

x

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$



$\hookrightarrow$ Ortskomponentenoperatoren

$$\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$$

(auch:

$$\hat{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix}$$

mit simultanen EZen

$$\{|\varphi_{\vec{x}}\rangle\}_{\vec{x} \in \mathbb{R}^3}$$

$$\hat{x}_i |\varphi_{\vec{x}}\rangle = x_i |\varphi_{\vec{x}}\rangle \quad \text{für } i=1,2,3$$

「auch $\hat{\vec{x}} |\varphi_{\vec{x}}\rangle = \vec{x} |\varphi_{\vec{x}}\rangle$ 」

→ Orthogonalität:

$$\langle \varphi_{\vec{x}} | \varphi_{\vec{x}'} \rangle = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

Vollständigkeit $(= \delta(x_1 - x_1') \delta(x_2 - x_2') \delta(x_3 - x_3'))$

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}^3} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} |\varphi_{\vec{x}}\rangle \langle \varphi_{\vec{x}}|$$

Zustand $|\psi\rangle$:

$$|\psi\rangle = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^3} |\psi\rangle$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} |\varphi_{\vec{x}}\rangle \underbrace{\langle \varphi_{\vec{x}} | \psi \rangle}_{\substack{!! \\ \psi(\vec{x})}}$$

$$|\psi\rangle = \int d^3\vec{x} \psi(\vec{x}) |\varphi_{\vec{x}}\rangle$$

$$\psi(\vec{x}) = \langle \varphi_{\vec{x}} | \psi \rangle$$

↑
3D-Wellenfkt. des Teil. im Z. $|\psi\rangle$

→ 3D Aufenthaltswkts. dichte: $|\psi(\vec{x})|^2$

→ Wkt, dass Teilchen in $G \subset \mathbb{R}^3$:

$$P = \int_G d^3\vec{x} |\psi(\vec{x})|^2$$

Skalarprodukt:

$$\langle \psi | \chi \rangle = \langle \psi | \mathbb{1}_{\mathbb{R}^3} | \chi \rangle$$

$$= \langle \psi | \left(\int d^3\vec{x} |\varphi_{\vec{x}}\rangle \langle \varphi_{\vec{x}}| \right) | \chi \rangle$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \underbrace{\langle \psi | \varphi_{\vec{x}} \rangle}_{\psi(\vec{x})^*} \underbrace{\langle \varphi_{\vec{x}} | \chi \rangle}_{\chi(\vec{x})}$$

$$\boxed{\langle \psi | \chi \rangle = \int d^3\vec{x} \psi(\vec{x})^* \chi(\vec{x})}$$

$$\begin{array}{ccc} |\psi\rangle & \xrightarrow{\hat{\vec{x}}} & \hat{\vec{x}} |\psi\rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ \psi(\vec{x}) & \xrightarrow{\vec{x}} & \vec{x} \psi(\vec{x}) \end{array}$$

Impuls in der QM (10)

→ Observable $p \hat{=} \text{herm. Op.}$ $\hat{p} = ?$
 $\updownarrow ??$
 $\hat{x} \hat{=}$

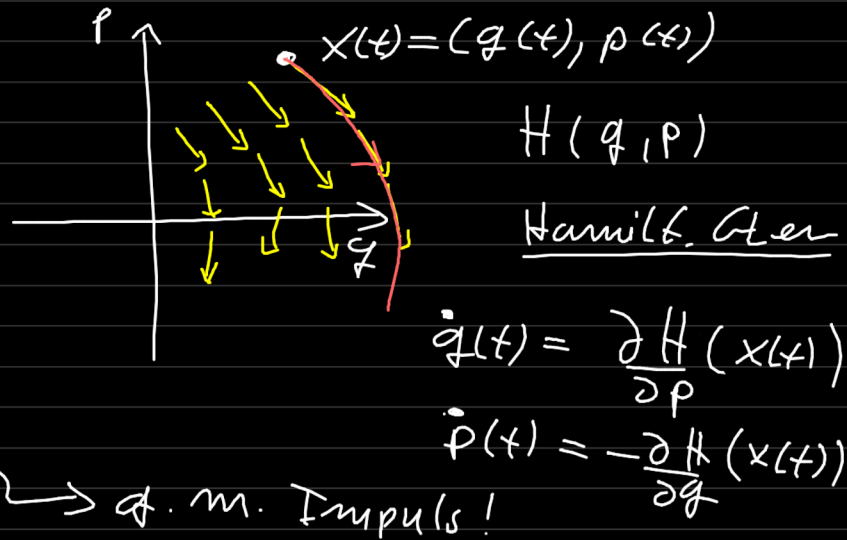
Impuls in der klassischen Mechanik

$$p = mv = m\dot{q}; \quad \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} = p$$

allg.: "Impuls p ist Generator der Translationen" !

analog zu:

"Hamilton H ist Generator der Zeitentwicklung"



$$\dot{X}(t) = \underbrace{\left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right)}_{V_H(X(t))} (X(t))$$

$$\dot{X}(t) = V_H(X(t))$$

$$V_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, \frac{\partial H}{\partial q} \right)$$

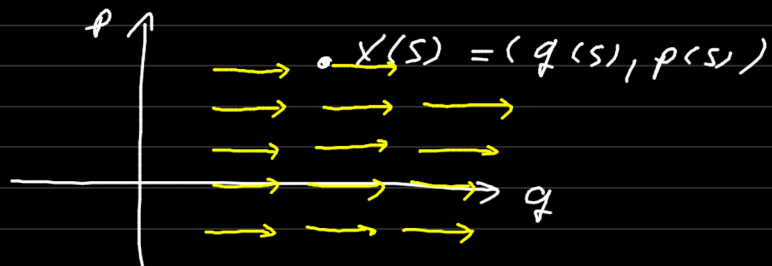
Translationen:

2, "Zeit"entwicklung gemäß hypoth.

Hamiltonfkt.

$$H(\cancel{q}, p) := \underline{\underline{p}}$$

→ Σ



$$\dot{X}(s) = \underbrace{\left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right)}_{V_H} (X(s))$$

$$\dot{X}(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Translation

→ $X(s) = (q_0 + s, p_0)$ um
Strecke s

QM: konstruierte Translation um Str. s



[Idee:
→ erhalte Generator:

$$\hat{p} = i\hbar \left. \frac{dT_s}{ds} \right|_{s=0}$$

$$T_s$$

$$s \in \mathbb{R}$$

Analogy zu

$$U_t$$



$$H = i\hbar \left. \frac{dU_t}{dt} \right|_{t=0}$$

Def.: Translation um Str. s :

T_s : beschrieben durch

Op. T_s :

$$T_s |\varphi_x\rangle = |\varphi_{x+s}\rangle$$

$$T_s |\psi\rangle = T_s \int dx |\varphi_x\rangle \underbrace{\langle \varphi_x | \psi \rangle}_{\psi(x)}$$

$$T_s |\psi\rangle = \int dx T_s |\varphi_x\rangle \psi(x)$$

$$= \int dx |\varphi_{x+s}\rangle \psi(x)$$

$$\stackrel{x \rightarrow x-s}{=} \int dx \psi(x-s) |\varphi_x\rangle$$

$x \rightarrow x-s$

$$|\psi\rangle \xrightarrow{T_s} |\tilde{\psi}\rangle = T_s |\psi\rangle$$

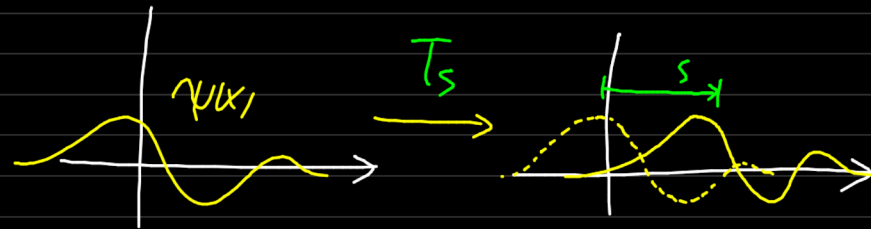
$\downarrow$

$\psi(x)$

$$\longrightarrow \psi(x-s)$$

$\downarrow$

$\psi(x-s)$



Eigenschaften der Translationen

- $T_0 = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$

- T_s unitär

- $T_{s_1+s_2} = T_{s_1} T_{s_2}$ ✓

$$\rightarrow \underline{\underline{\frac{d}{ds} T_s}} \Big|_{s_0} = \frac{d}{ds} T_{s+s_0} \Big|_{s=0}$$

$$= \frac{d}{ds} (T_s T_{s_0}) \Big|_{s=0}$$

$$= \frac{d}{ds} T_s \Big|_{s=0} \underline{\underline{T_{s_0}}}$$

$$\underbrace{\quad}_{\underline{\underline{J}}}$$

unabhängig
von s, s_0 !

$\rightarrow T_s$ genügt DGL

$$T_s' = J T_s$$

zum AW. $T_0 = \mathbb{1}$ bei $s=0$

$$\rightarrow \text{Lsg.: } T_s = \mathbb{1} e^{J s}$$

$$T_s \text{ unitär} \rightarrow J = -J^+$$

$$T_s^+ = (T_s)^{-1} = T_{-s} \quad J \text{ anti-hermitesch}$$

mit Impulsoperator $\hat{p}$ def durch

$$\hat{p} := i\hbar \left. \frac{d}{ds} T_s \right|_{s=0}$$

ist $T_s = e^{\hat{p}s/\hbar} = e^{-i\hat{p}s/\hbar}$

• $\hat{p} \overset{?}{\longleftrightarrow} \hat{x} \longrightarrow [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \mathbb{1}$

• Ortsdarstellung? $\psi(x) \xrightarrow{p} -i\hbar \frac{d\psi(x)}{dx}$

• $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$

1) $[\hat{x}, T_s] |\varphi_x\rangle$

$$= (\hat{x} T_s - T_s \hat{x}) |\varphi_x\rangle$$

$$= \hat{x} |\varphi_{x+s}\rangle - \overset{\text{parallel}}{\underbrace{T_s \hat{x} |\varphi_x\rangle}} \quad \overset{\text{parallel}}{\underbrace{T_s |\varphi_x\rangle}}$$

$$= \cancel{(x+s)} |\varphi_{x+s}\rangle - \cancel{x} |\varphi_{x+s}\rangle = s |\varphi_{x+s}\rangle$$

d.h. $[\hat{x}, T_s] |\varphi_x\rangle = s T_s |\varphi_x\rangle$ für
alle x !

also $[\hat{x}, T_s] = s T_s$ (*)

$$\begin{aligned} \leadsto [\hat{x}, \hat{p}] &\stackrel{\text{def}}{=} [\hat{x}, i\hbar \frac{d}{ds} T_s]_{s=0} \\ &= i\hbar \frac{d}{ds} [\hat{x}, T_s] \Big|_{s=0} \stackrel{(*)}{=} i\hbar \frac{d}{ds} (s T_s) \Big|_{s=0} \\ &= \underline{i\hbar T_0} + i\hbar \underbrace{\left(s \frac{d}{ds} T_s \right)}_{\text{d}} \Big|_{s=0} \end{aligned}$$

$$\leadsto [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \mathbb{1}_x \quad \checkmark$$

Darstellung von $\hat{p}$

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\hat{p}} |\tilde{\psi}\rangle = \hat{p} |\psi\rangle$$

$$\tilde{\psi}(x) = \langle \varphi_x | \tilde{\psi} \rangle = \langle \varphi_x | \hat{p} | \psi \rangle$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} i\hbar \frac{d}{ds} \underbrace{\langle \varphi_x | T_s | \psi \rangle}_{\psi(x-s)} \Big|_{s=0} \quad (\text{siehe oben!})$$

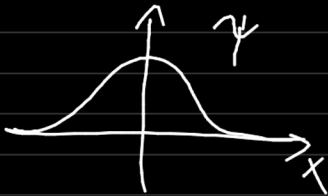
also $\boxed{\tilde{\psi}(x) = -i\hbar \frac{d}{dx} \psi(x)}$

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\hat{p}} \hat{p}|\psi\rangle = |\tilde{\psi}\rangle$$

$$\downarrow$$

$$\psi(x) \longrightarrow -i\hbar \frac{d\psi(x)}{dx} = \tilde{\psi}(x)$$

Bsp. Erwartungswert von $\hat{p}$ in $|\psi\rangle$:
 $|\psi\rangle$ mit Wellfkt.

$$\psi(x) = \frac{e^{-x^2/4\sigma^2}}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}}$$


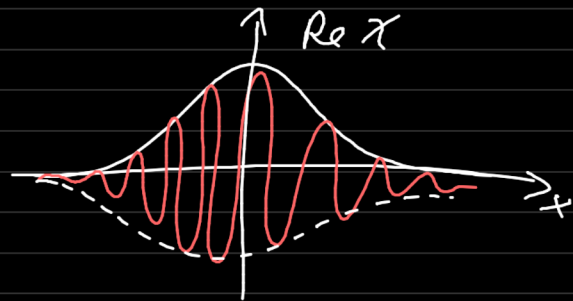
$$\langle p \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \right) \psi(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x)|^2 \cdot \left(\frac{-i\hbar x}{2\sigma^2} \right) = 0$$

- Antisymmet.

2) $|x\rangle$ mit Wellenf. $\chi(x) = e^{i h x} \psi(x)$



$$\langle p \rangle_x = \int dx \chi(x)^* \left(-i \hbar \frac{d}{dx} \right) \chi(x)$$

NR: $\frac{d}{dx} \chi(x) = \frac{+i \hbar x}{2 \sigma^2} \chi(x) + i h \chi(x)$

$$\begin{aligned} \rightarrow \langle p \rangle_x &= \int_{-\infty}^{\infty} dx |\chi(x)|^2 \cdot x \cdot \frac{i \hbar}{2 \sigma^2} \\ &+ \hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx |\chi(x)|^2 \\ &\quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\| \chi \|^2 = 1} \end{aligned}$$

$$\langle p \rangle_x = \hbar$$