

Wdhlg.: Translation: $T_s |\varphi_x\rangle \stackrel{!}{=} |\varphi_{x+s}\rangle$

$$\rightarrow T_s \text{ unitär, } T_0 = \mathbb{1}, T_{s_1+s_2} = T_{s_1} T_{s_2}$$

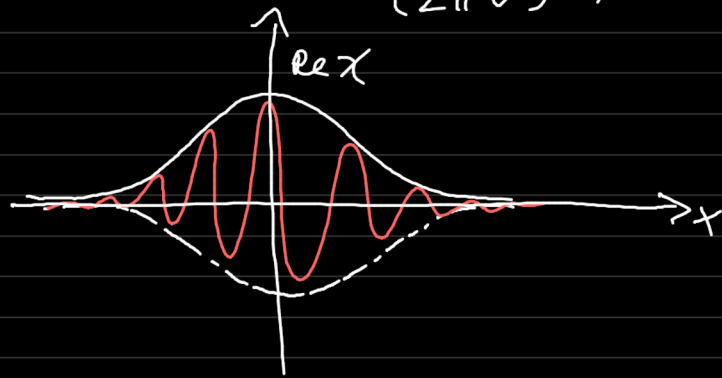
$\rightarrow$ Impuls := Generator der Translationen

$$\text{d.h. } \boxed{\hat{p} := i\hbar \left. \frac{dT_s}{ds} \right|_{s=0}} \rightarrow \boxed{T_s = e^{-i\hat{p}s/\hbar}}$$

$$\bullet [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \quad (\text{da } [\hat{x}, T_s] = s T_s)$$

$$\bullet \psi(x) \xrightarrow{\hat{p}} -i\hbar \frac{d}{dx} \psi(x)$$

Bsp.: $\chi(x) = e^{ikx} \frac{e^{-x^2/4\sigma^2}}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}}$



$$\rightarrow \langle \hat{p} \rangle_\chi = \hbar k$$

$$\begin{aligned} \langle \chi | \hat{p} | \chi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \chi^*(x) \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \right) \chi(x) \\ &= \hbar k \end{aligned}$$

Impulseigenzustand $|\chi_p\rangle$

→ Eigenwertgl.: $\hat{p} |\chi_p\rangle = p |\chi_p\rangle$

↓

→ EWar. in Ortsvorst.: $-i\hbar \frac{d}{dx} \chi_p(x) = p \chi_p(x)$

also: $\chi_p'(x) = \underbrace{\frac{i}{\hbar} p}_{=}$ $\chi_p(x)$

spez. (sg.) $\chi_p(x) = e^{\frac{i}{\hbar} p x}$

→ $|\chi_p\rangle$ Impulseigenzust.
mit Wellenfkt $\chi_p(x) = e^{i p x / \hbar}$
zum EW. p .

→ $\{|\chi_p\rangle\}_{p \in \mathbb{R}}$

Orthogonalität:

$$\langle \chi_{p'} | \chi_p \rangle = 2\pi \delta\left(\frac{p-p'}{\hbar}\right)$$

$$\begin{aligned}
 \left[\langle \chi_{p'} | \chi_p \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \chi_p^*(x) \chi_{p'}(x) \right. \\
 &\quad \left. e^{i p' x / \hbar} \quad e^{i p x / \hbar} \right. \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{i \left(\frac{p-p'}{\hbar} \right) x} = 2\pi \, \delta \left(\frac{p-p'}{\hbar} \right) \left. \right]
 \end{aligned}$$

Vollständigkeit:

$$A := \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} |\chi_p\rangle \langle \chi_p| = \mathbb{1}_x}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{2.2}: \quad \langle \varphi_x | A | \varphi_{x'} \rangle &= \langle \varphi_x | \mathbb{1}_x | \varphi_{x'} \rangle \\
 &= \langle \varphi_x | \varphi_{x'} \rangle = \delta(x-x') \\
 \delta(x-x') &\stackrel{①}{=} \langle \varphi_x | A | \varphi_{x'} \rangle \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \underbrace{\langle \varphi_x | \chi_p \rangle}_{e^{i p x / \hbar}} \underbrace{\langle \chi_p | \varphi_{x'} \rangle}_{e^{-i p x' / \hbar}} \\
 &= (*)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\star) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{i(x-x')p/\hbar} \\
 &\stackrel{p=\hbar k}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{i(x-x')k} = \frac{2\pi}{2\pi} \delta(x-x')
 \end{aligned}$$

von nun an: $| \chi_k \rangle$ Zustand mit
Eigenfkt $\chi_k(x) = e^{ikx}$

$| \chi_k \rangle$ mit Wellenf. $\chi_k(x) = e^{ikx}$
ist Impuls eigenzustand
zum Eigenwert $p = \hbar k$:

$$\hat{p} | \chi_k \rangle = \hbar k | \chi_k \rangle$$

($\chi_k(x) = e^{ikx}$: Impulseigenfkt.)

$$\bullet \quad \langle \chi_{k'} | \chi_k \rangle = 2\pi \delta(k-k')$$

$$\bullet \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} | \chi_k \rangle \langle \chi_k | = \mathbb{1}$$

Orts- und Impulsdarstellung

Ort: $|\psi\rangle = \mathbb{1}|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\varphi_x\rangle \underbrace{\langle \varphi_x | \psi \rangle}_{\psi(x)}$

$$= \int dx \psi(x) |\varphi_x\rangle$$

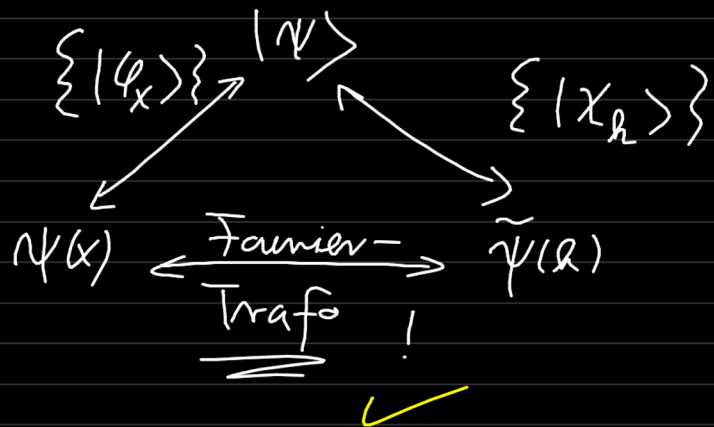
Impuls: $|\psi\rangle = \mathbb{1}|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} |x_k\rangle \underbrace{\langle x_k | \psi \rangle}_{\tilde{\psi}(k)}$

Impuls wellenfkt. des Zust. $|\psi\rangle$:

$$\tilde{\psi}(k) := \langle x_k | \psi \rangle$$

$$\rightarrow |\psi\rangle = \int \frac{dk}{2\pi} \tilde{\psi}(k) |x_k\rangle$$

Transformation zwischen
Orts und Impulsdarstellung



$$\begin{aligned}\psi(x) &= \langle \varphi_x | \psi \rangle = \langle \varphi_x | 1_x | \psi \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \underbrace{\langle \varphi_x | \chi_k \rangle}_{e^{ikx}} \underbrace{\langle \chi_k | \psi \rangle}_{\tilde{\psi}(k)} = \tilde{\psi}(k)\end{aligned}$$

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{\psi}(k) e^{ikx}$$

$$\tilde{\psi}(k) = \langle \chi_k | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \underbrace{\langle \chi_k | \varphi_x \rangle}_{e^{-ikx}} \underbrace{\langle \varphi_x | \psi \rangle}_{\psi(x)}$$

$$\tilde{\psi}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) e^{-ikx}$$

$$\int dx \psi(x) |\varphi_x\rangle = |\psi\rangle = \int \frac{dk}{2\pi} \tilde{\psi}(k) |x_k\rangle$$

$\uparrow$ "Teilchenbild"
 $\uparrow$ "Wellenbild"

1D $\rightarrow$ 3D

3D Translat.: $T_{\vec{s}} |\varphi_{\vec{x}}\rangle = |\varphi_{\vec{x}+\vec{s}}\rangle$

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

Impuls komponenten operatoren $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3$

$$\hat{p}_l := i \hbar \left. \frac{\partial T_{\vec{s}}}{\partial s_l} \right|_{\vec{s}=0} \quad l=1,2,3$$

$$\hat{\vec{p}} = \begin{pmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \end{pmatrix}$$

- $[\hat{x}_\ell, \hat{p}_m] = i\hbar \delta_{\ell m}$

• Darstellung:

$$\psi(\vec{x}) \xrightarrow{\hat{p}_\ell} -i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{x})}{\partial x_\ell}$$

$$\psi(\vec{x}) \xrightarrow{\hat{\vec{p}}} -i\hbar \vec{\nabla} \psi(\vec{x})$$

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Impuls eigenzustand $|\chi_{\vec{h}}\rangle$
 mit Wellenf. $\chi_{\vec{h}}(\vec{x}) = e^{i\vec{h} \cdot \vec{x}}$

$$\rightarrow \hat{p}_\ell |\chi_{\vec{h}}\rangle = \hbar h_\ell |\chi_{\vec{h}}\rangle$$

$$\hat{\vec{p}} |\chi_{\vec{h}}\rangle = \hbar \vec{h} |\chi_{\vec{h}}\rangle$$

Orthogonalität:

$$\langle \chi_{\vec{l}'} | \chi_{\vec{l}} \rangle = (2\pi)^3 \delta(\vec{l} - \vec{l}')$$

Vollständigkeit:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{l}}{(2\pi)^3} |\chi_{\vec{l}} \rangle \langle \chi_{\vec{l}}| = 1_{\mathcal{H}}.$$

Bemerkung:

• H ist Generator der Zeitentwicklung
①

$\leadsto A$ Erhaltungsgröße $\Leftrightarrow [H, A] = 0$

analog:

• $\hat{p}$ ist Generator der Translationen

$\leadsto A$ translationsinvariant
②

$$\Leftrightarrow [\hat{p}, A] \stackrel{!}{=} 0$$

$\uparrow$
 $\langle A \rangle_{|\psi\rangle}$ unabhängig von $s \quad \forall |\psi\rangle$

H translationsinvariant

$$\Leftrightarrow [\hat{p}, H] = 0$$

$\Leftrightarrow \hat{p}$ Erhaltungsgröße

H translationsinvariant $\Leftrightarrow \hat{p}$ Erhaltungsgröße

Dynamik des Punktteilchens

z.B.: $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = -\hat{H} |\psi(t)\rangle$

Schr.-Gl.

$$\hat{H} = \sum \dots$$

zuerst: freies Pkt.-teilchen in 3D

Translationsinvarianz! $\rightarrow$ Impulserhaltung!

• $\langle \hat{P}_i \rangle_{\psi(t)}$ konst. $P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = |\vec{P}|^2$

• $\langle H \rangle_{\psi(t)}$ konst. $\rightarrow E$

Energie-Impuls-Relation: $E = \frac{|\vec{P}|^2}{2m}$

$\hookrightarrow \langle E \rangle_{\psi(t)} = \frac{1}{2m} \langle \hat{P}_1^2 + \hat{P}_2^2 + \hat{P}_3^2 \rangle_{\psi(t)}$
 $\stackrel{!}{=} \frac{1}{2m} \langle |\vec{P}|^2 \rangle$

$\rightarrow$ der Fall für

$$H = \frac{1}{2m} |\hat{P}|^2$$

$$= \frac{1}{2m} (\hat{P}_1^2 + \hat{P}_2^2 + \hat{P}_3^2)$$

$\hookrightarrow$ Schrödinger-Gl.:

$$i\hbar |\dot{\psi}(t)\rangle = \frac{|\vec{P}|^2}{2m} |\psi(t)\rangle$$

in Ortsdarstellung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{x}, t)$$

$$\psi(\vec{x}) \xrightarrow{\hat{p}_x} -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(\vec{x})$$

$$\psi(\vec{x}) \xrightarrow{\hat{p}_x^2} -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(\vec{x})$$

$$\psi(\vec{x}) \xrightarrow{|\hat{p}|^2} -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \psi(\vec{x})$$

$$(\vec{\nabla})^2 \equiv \Delta$$

Laplace-Operator

mathematisch analog:
Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} T(\vec{x}, t) = a \Delta T(\vec{x}, t)$$

↪ in imaginärer Zeit: $t \rightarrow i\tau$

$$(-1) \frac{\partial}{\partial \tau} T(\vec{x}, \tau) = a \Delta T(\vec{x}, \tau)$$

