

---

## Theoretische Physik II – Quantenmechanik – Blatt 1

---

Sommersemester 2023

**Webpage:** [http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/qm\\_2023.html/](http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/qm_2023.html/)

**Abgabe:** bis **Mittwoch, 19.04.23, 10:00** in elektronischer Form per ILIAS unter  
[https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto\\_uk\\_crs\\_5154210.html](https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5154210.html)

### 1. Zur Diskussion

0 Punkte

- a) Was ist ein komplexer Vektorraum?
- b) Was ist ein hermitesches Skalarprodukt?
- c) Was ist ein unitärer Vektorraum?

### 2. Stern-Gerlach-Experiment

2+2+4=8 Punkte

In  $z$ -Richtung positiv bzw. negativ polarisierte Silberatome seien durch orthonormale Zustandsvektoren  $\varphi_{z+}$  bzw.  $\varphi_{z-}$  beschrieben. In  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung polarisierte Atome sind dann beschrieben durch Zustandsvektoren

$$\begin{aligned} \varphi_{x+} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{z+} + \varphi_{z-}), & \varphi_{x-} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{z+} - \varphi_{z-}), \\ \text{und} \quad \varphi_{y+} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{z+} + i\varphi_{z-}), & \varphi_{y-} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{z+} - i\varphi_{z-}) \end{aligned}$$

(vgl. Vorlesung).

- a) Bestimmen Sie die Betragsquadrate der Skalarprodukte  $\langle \varphi_{x+}, \varphi_{y+} \rangle$  und  $\langle \varphi_{z+}, \varphi_{y-} \rangle$ .
- b) Zeigen Sie, dass

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3}} (\varphi_{x+} + \varphi_{y+})$$

ein normierter Vektor (und damit ein Zustandsvektor) ist.

- c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt eine  $\mu_y$ -Messung an einem Silberatom im Zustand  $\psi$  das Ergebnis  $+\mu_0$  bzw.  $-\mu_0$ ? Welcher Erwartungswert  $\langle \mu_y \rangle_\psi$  ergibt sich daraus?

### 3. Superposition und Gemisch

4 Punkte

Wir betrachten zwei Quellen  $A$  und  $B$  von Silberatomen. Quelle  $A$  emittiert Silberatome, deren Spin sich jeweils in der quantenmechanischen Superposition  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{z+} + \varphi_{z-})$  von "up" und "down" befindet (bzgl.  $z$ -Richtung). Quelle  $B$  emittiert dagegen Silberatome in einem sogenannten Zustands-Gemisch, bei dem sich der Spin eines Atomes zufällig im Zustand  $\varphi_{z+}$  ("up") oder im Zustand  $\varphi_{z-}$  ("down") befindet (bzgl.  $z$ -Richtung), jeweils mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$ . Wie kann man anhand von Messungen an den Atomen der jeweiligen Quelle entscheiden, ob Quelle  $A$  oder  $B$  vorliegt? Oder ist das am Ende unmöglich und die quantenmechanische Superposition ist nicht von dem Zustandsgemisch zu unterscheiden?

## 4. Pauli-Matrizen

6+3=9 Punkte

Die Komponenten  $\mu_x$ ,  $\mu_y$  und  $\mu_z$  des magnetischen Momentes  $\vec{\mu}$  eines Silberatoms bilden Observablen, die durch Operatoren

$$\begin{aligned}\mu_x &= \mu_0 (P_{\varphi_{x+}} - P_{\varphi_{x-}}) \\ \mu_y &= \mu_0 (P_{\varphi_{y+}} - P_{\varphi_{y-}}) \\ \mu_z &= \mu_0 (P_{\varphi_{z+}} - P_{\varphi_{z-}})\end{aligned}$$

dargestellt werden können (vgl. Vorlesung). Hierbei bezeichnet  $P_\chi$  die Orthogonalprojektion auf einen normierten Vektor  $\chi$ . Die Vektoren  $\varphi_{x\pm}$ ,  $\varphi_{y\pm}$ ,  $\varphi_{z\pm}$  sind wie in Aufgabe 1. definiert.

- a) Zeigen Sie, dass die Abbildungsmatrizen dieser Operatoren bzgl. der ONB  $(\varphi_{z+}, \varphi_{z-})$  bis auf den Faktor  $\mu_0$  durch die Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben sind, also  $\mu_x = \mu_0 \sigma_1$ ,  $\mu_y = \mu_0 \sigma_2$  und  $\mu_z = \mu_0 \sigma_3$  (unter der üblichen Gleichsetzung von Symbolen für Operatoren und deren Abbildungsmatrizen).

- b) Bestimmen Sie Eigenwerte und -vektoren der Pauli-Matrizen. [Tipp: Aufgabenteil a) .]

## 5. Verallgemeinerte Euler-Formel

6 Punkte

Eulers Formel  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  (für  $\varphi \in \mathbb{R}$ ) besitzt eine in der Quantenmechanik nützliche Verallgemeinerung für Pauli-Matrizen:

$$e^{i\sigma_j \varphi} = \mathbf{1} \cos \varphi + i\sigma_j \sin \varphi, \quad j = 1, 2, 3, \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie diese Beziehung, indem Sie sich an den Beweis der Euler-Formel erinnern und Sie sich zudem davon überzeugen, dass für  $l \in \mathbb{N}$

$$\sigma_j^{2l} = \mathbf{1}, \quad \sigma_j^{2l+1} = \sigma_j.$$

Für einen Operator  $A$  ist  $e^A$  durch die Potenzreihe der Exponentialfunktion definiert:  $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ .