Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse

Theoretische Physik II – Quantenmechanik – Blatt 10

Sommersemester 2023

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/qm_2023.html/*

Abgabe: bis **Mittwoch, 28.06.23, 10:00** in elektronischer Form per ILIAS unter https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5154210.html

37. Zur Diskussion *0 Punkte*

Ein H_0-System unterliegt einer zeitabhängigen Störung $V(t)$.

a) Wie ist der zeitabhängige Zustand $|\psi(t)\rangle_I$ im Wechselwirkungsbild definiert?

b) Welcher Dynamik genügt er?

c) Wie lautet $|\psi(t)\rangle_I$ für Anfangszustand $|\psi_0\rangle$ bei $t = 0$ in erster Ordnung Störungstheorie?

38. Elektron im Kasten *4 Punkte*

Ein Elektron in einem eindimensionalen Kasten $0 \leq x \leq L$ erfährt ein konstantes elektrisches Feld $\mathcal{E}$ in x-Richtung. Ermitteln Sie in erster Ordnung Störungstheorie die Grundzustandsenergie des Elektrons.

39. Zeitabhängige Störungstheorie *8 Punkte*

Ein geladener harmonischer Oszillator (1D, Ladung q, Masse m, Fequenz ω) befinde sich zur Zeit $t_0 = -\infty$ im Grundzustand $|0\rangle$. Berechnen Sie in erster Ordnung Störungstheorie die Wahrscheinlichkeit dafür, den Oszillator zur Zeit $t_1 = +\infty$ im Zustand $|n\rangle$ vorzufinden, wenn er der Wirkung eines zeitabhängigen homogenen elektrischen Feldes

$$\mathcal{E}_x(t) \;=\; \tfrac{A}{\sqrt{\pi}\,\tau}\, \mathrm{e}^{-t^2/\tau^2}$$

ausgesetzt ist ($A > 0$, $\tau > 0$).

Hinweis: Wie immer ist $\int \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-ax^2+bx} = \sqrt{\tfrac{\pi}{a}}\, \mathrm{e}^{b^2/4a}$, $\quad (a > 0,\ b \in \mathbb{C})$.

40. Variationsprinzip *6+8=14 Punkte*

Die Grundzustandsenergie und der (nicht entartete) Grundzustand eines Systems kann durch ein Variationsprinzip näherungsweise bestimmt werden. Die mathematische Grundlage dieses Prinzips ist Gegenstand von Aufgabenteil **a)**. Demnach ist der Erwarungswert des Hamiltonoperator H bzgl. eines beliebigen Zustandsvektors $|\psi\rangle$ eine obere Schranke der Grundzustandsenergie E_0,

$$E_0 \;\leq\; \langle\psi|H|\psi\rangle,$$

mit Gleichheit genau dann wenn $|\psi\rangle$ der Grundzustand ist. Das Variationsprinzip besteht nun darin, $|\psi\rangle$ als Funktion eines bzw. mehrerer Parameter α zu wählen, $|\psi\rangle = |\psi_\alpha\rangle$, und das Minimum des Ausdrucks

$$E(\alpha) \;=\; \langle\psi_\alpha|H|\psi_\alpha\rangle \tag{1}$$

bzgl. α zu suchen. Bei geeignet gewählten normierten Versuchsvektoren $|\psi_\alpha\rangle$ bilden das Minimum von $E(\alpha)$ und der minimierende Versuchsvektor $|\psi_\alpha\rangle$ gute Näherungen von Grundzustandsenergie E_0 und Grundzustand $|0\rangle$ des Systems.

a) Beweisen Sie Ungleichung (1) und begründen Sie, dass Gleichheit nur für $|\psi\rangle = |0\rangle$ gilt.

b) Ermitteln Sie mit dem Variationsprinzip näherungsweise Grundzustandsenergie und Grundzustand für ein Teilchen der Masse m im Potenzial

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & : \; x < 0 \\ c\,x & : \; x \geq 0 \end{cases} .$$

Verwenden Sie dazu einen Versuchszustand $|\psi_\alpha\rangle$ mit Wellenfunktion

$$\psi_\alpha(x) \;=\; 2\alpha^{3/2}\, x\, \mathrm{e}^{-\alpha x} .$$

Hinweis: Benutzen Sie $\quad \int_0^\infty u^n \mathrm{e}^{-\beta u}\, \mathrm{d}u \;=\; \frac{n!}{\beta^{n+1}}, \quad \beta > 0 .$