Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse

Theoretische Physik II – Quantenmechanik – Blatt 11

Sommersemester 2023

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/qm_2023.html/*

Abgabe: bis **Mittwoch, 05.07.23, 10:00** in elektronischer Form per ILIAS unter https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5154210.html

41. Zur Diskussion *0 Punkte*

a) Was ist der Zusammenhang zwischen Gesamtdrehimpuls $\vec{J}$ eines quantenmechanischen Systems und den Rotationen im dreidimensionalen Raum?

b) Wie lauten die Vertauschungsrelationen der Komponenten von Gesamtdrehimpuls $\vec{J}$, Bahndrehimpuls $\vec{L}$ und Spin $\vec{S}$? Worin sind diese Relationen begründet?

42. Geladenes Teilchen im homogenen Magnetfeld *2+1+7=10 Punkte*

Ein Teilchen (Masse m, Ladung q) bewegt sich in der x_1x_2- Ebene unter dem Einfluss eines homogenden Magnetfelds $\vec{B} = B\vec{e}_3$ Der Hamiltonoperator des Teilchens ist

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r})\right)^2 ,$$

mit $\vec{p} = (p_1, p_2, 0)$ und $\vec{A}(\vec{r})$ einem Vektorpotenzial des Magnetfelds $\vec{B}$, d.h. $\mathrm{rot}\vec{A} = \vec{B}$.

a) Klassisch betrachtet führt das Teilchen bekanntlich eine Zyklotronbewegung aus. Wie groß ist die Zyklotronfrequenz ω_c, mit der bei dieser Bewegung das Teilchen eine Kreisbahn durchläuft?

b) Verifizieren Sie, dass $\vec{A}(\vec{r}) = x_1 B\vec{e}_2$ ein geeignetes Vektorpotenzial für das homogene Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_3$ ist.

c) Verwenden Sie zur Bestimmung des Energiespektrums den Ansatz

$$\psi_k(x_1, x_2) = \varphi_k(x_1)\mathrm{e}^{ikx_2}$$

für die Eigenfunktion von H mit dem Vektorpotenzial aus **b)**. Zeigen Sie, dass die Funktion $\varphi_k(x_1)$ eine Eigenfunktion eines (verschobenen) 1D harmonischen Oszillators der Zyklotronfrequenz ω_c ist und schließen Sie daraus auf das Energiespektrum des Systems. Was lässt sich über die Entartung der Energieniveaus sagen?

43. Drehimpulsvertauschungsrelationen *3+3=6 Punkte*

a) Zeigen Sie unter Verwendung von

$$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}$$

die Drehimpulsvertauschungsrelation

$$[L_1, L_2] = i\hbar L_3 .$$

b) Die Drehimpulskomponenten L_1 und L_2 eines Systems mit Hamiltonoperator H seien Erhaltungsgrößen. Zeigen Sie, dass dann auch L_3 eine Erhaltungsgröße des Systems ist.

44. Quantisierung des Bahndrehimpulses *3+3+4=10 Punkte*

In dieser Aufgaben Überzeugen Sie sich davon, dass die Komponenten des Bahndrehimpulses $\hat{\vec{L}}$ eines Teilchens nur *ganzzahlige* Vielfache von $\hbar$ als Eigenwerte haben können.

a) $f(x_1, x_2)$ sei eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \;=\; \left(-x_2\frac{\partial}{\partial x_1} \;+\; x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\right) f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,.$$

b) Begründen Sie mittels **a)**, dass die Wirkung des Operators $\hat{L}_3$ auf eine Wellenfunktion $\psi(r,\varphi,z)$ in Zylinderkoordinaten (r,φ,z) gegeben ist durch

$$\hat{L}_3\,\psi(r,\varphi,z) \;=\; -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}\psi(r,\varphi,z)\,.$$

c) Untersuchen Sie nun das Eigenwertproblem

$$\hat{L}_3\,\psi_\lambda(r,\varphi,z) \;=\; \lambda\psi_\lambda(r,\varphi,z)$$

mit dem Ansatz

$$\psi_\lambda(r,\varphi,z) = g(\varphi)h(r,z)$$

für die Eigenfunktion ψ_λ von $\hat{L}_3$ zum Eigenwert λ. Folgern Sie unter Beachtung der 2π-Periodizität von ψ_λ in φ (warum notwendig?), dass der Eigenwert λ in ganzahligen Vielfachen von $\hbar$ quantisiert ist (wie Bohr schon postuliert hatte).