Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse

Theoretische Physik II – Quantenmechanik – Blatt 2

Sommersemester 2023

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/qm_2023.html/*

Abgabe: bis **Mittwoch, 26.04.23, 10:00** in elektronischer Form per ILIAS unter https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5154210.html

6. Zur Diskussion

0 Punkte

a) Auf welche Weise wird in der Quantenmechanik eine Observable durch einen hermiteschen Operator beschrieben?

b) Was besagt die Bornsche Regel?

c) Weshalb ist nach der Bornschen Regel der Erwartungswert einer Observablen A im Zustand $|\psi\rangle$ durch $\langle\psi|\,\hat{A}\,|\psi\rangle$ gegeben?

d) Wie lautet die Schrödingergleichung eines Systems mit Hamiltonoperator H?

e) Weshalb sollte der Hamiltonoperator H hermitesch sein?

f) Wenn A eine Erhaltungsgröße ist, was folgt daraus für den Kommutator von A mit H? Folgt umgekehrt aus $[H, A] = 0$, dass A eine Erhaltungsgröße ist?

g) Warum ist die dem Hamiltonoperator H entsprechende Observable *Energie* in jedem abgeschlossenen System eine Erhaltungsgröße?

7. Operatoren in Dirac-Notation

6×2=12 Punkte

Im Folgenden sei $B = (\,|\varphi_1\rangle\,, |\varphi_2\rangle\,, \ldots, |\varphi_n\rangle\,)$ eine ONB eines unitären Vektorraums $\mathcal{H}$.

a) Zeigen Sie, dass $\sum_{i=1}^{n} |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \;=\; \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$.

b) Wie lautet die Matrix des Operators $E_{ij} \;=\; |\varphi_i\rangle\langle\varphi_j|$ bzgl. Basis B?

c) A sei ein Operator auf $\mathcal{H}$. Zeigen Sie:

$$A \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} \langle\varphi_i|\,A\,|\varphi_j\rangle\; |\varphi_i\rangle\langle\varphi_j|\;.$$

[Hinweis: $A = \mathbf{1}_{\mathcal{H}}\,A\,\mathbf{1}_{\mathcal{H}}$ und Aufgabenteil **1)**]

d) Folgern Sie mittels **b)** und **c)**, dass die Matrix (A_{ij}) eines Operators A bzgl. Basis B die Komponenten

$$A_{ij} \;=\; \langle\varphi_i|\,A\,|\varphi_j\rangle$$

besitzt.

e) Zeigen Sie, dass $(|\varphi\rangle\langle\psi|)^\dagger \;=\; |\psi\rangle\langle\varphi|$.

f) Wie lauten die Eigenwerte und Eigenvektoren des Operators $A \;=\; \sum_{i=1}^{n} c_i\,|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$? Unter welchen Bedingungen an die Koeffizienten $c_i \in \mathbb{C}$ ist A hermitesch?

8. Hinreichend *6 Punkte*

A sei ein Operator auf einem unitären Vektorraum $\mathcal{H}$ und für alle $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ gelte

$$\langle\psi|\, A\, |\psi\rangle \;=\; 0\,.$$

Zeigen Sie, dass dann $A = 0$. Gilt eine analoge Aussage auch für Operatoren eines *euklidischen* Vektorraums?

9. Spin-Präzession *10 Punkte*

Silberatome werden in e_z-Richtung polarisiert, durchlaufen dann innerhalb einer Zeitspanne $[0, t]$ ein Magnetfeld Be_x und werden dann durch einen Stern-Gerlach-Magneten geführt, der längs e_z ausgerichtet ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden die Atome in diesem Magneten in positive e_z-Richtung abgelenkt? Bestimmen Sie ebenso die Erwartungswerte der Observablen μ_x, μ_y und μ_z kurz bevor die Atome in den Stern-Gerlach-Magneten gelangen. ψ_t sei der Spin-Zustand eines Silberatoms zu diesem Zeitpunkt. Auf welche Weise entwickelt sich der relle Vektor

$$\langle\vec{\mu}\rangle_{\psi_t} = \begin{pmatrix} \langle\mu_x\rangle_{\psi_t} \\ \langle\mu_y\rangle_{\psi_t} \\ \langle\mu_z\rangle_{\psi_t} \end{pmatrix}$$

mit der Zeit t?

10. Kommutatoren *2+4=6 Punkte*

Verifizieren Sie folgende Relationen:

(i) $\quad [AB, C] \;=\; A[B, C] + [A, C]B$

(ii) $\quad [A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0$

11. Erhaltungsgrößen *2+4=6 Punkte*

A und B seien Observablen eines Systems mit Hamiltonoperator H.

a) Zeigen Sie, dass $C := i[A, B]$ ebenfalls ein hermitescher Operator ist und damit C eine weitere Observable des Systems ist.

b) Nun seien A und B Erhaltungsgrößen des Systems. Was impliziert dies für die Kommutatoren $[H, A]$ und $[H, B]$? Folgern Sie daraus mit Aufgabe **10.**(ii), dass dann auch C eine Erhaltungsgröße des Systems ist. Kennen Sie ein analoge Aussage der klassischen Mechanik?