Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse

Theoretische Physik II – Quantenmechanik – Blatt 3

Sommersemester 2023

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/qm_2023.html/*

Abgabe: bis **Mittwoch, 03.05.23, 10:00** in elektronischer Form per ILIAS unter https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5154210.html

6. Zur Diskussion

0 Punkte

Was ist der Zeitentwicklungsoperator $U(t)$? Wozu dient er? Warum ist er unitär?

7. Operatorfunktion

3+2+2=7 Punkte

Eine komplexe Funktion $f(z)$ sei durch eine Potenzreihe gemäß $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ definiert. Eine entsprechende Operatorfunktion $f(A)$ ist dann gegeben durch $f(A) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n$.

a) A sei ein (unitär diagonalisierbarer) Operator mit Eigenwerten $a_1, \dots, a_N$ zu orthonormalen Eigenvektoren $\varphi_1, \dots, \varphi_N$. Zeigen Sie, dass der Operator $f(A)$ Eigenwerte $f(a_1), \dots, f(a_N)$ zu denselben Eigenvektoren besitzt. Wie lauten demnach die Spektraldarstellungen von A und $f(A)$?

b) Nun seien die Koeffizienten c_l der Funktion f reell. Zeigen Sie, dass dann

$$f(A)^\dagger = f(A^\dagger)$$

c) U sei ein unitärer Operator. Zeigen Sie:

$$f(U^\dagger A U) = U^\dagger f(A) U \,.$$

8. Heisenberg-Bild

3+2+4+1=10 Punkte

Im Heisenberg-Bild wird die quantenmechanische Dynamik durch zeitabhängige Operatoren

$$A_H(t) := U^\dagger(t) A U(t)$$

dargestellt (vgl. Vorlesung). Hierbei ist $U(t)$ der Zeitentwicklungsoperator $U(t) = \exp(-iHt/\hbar)$.

a) Zeigen Sie:

$$\dot{A}_H(t) = \frac{i}{\hbar}[H, A_H(t)] \,. \tag{1}$$

b) $\psi(t)$ sei Lösung der Schrödingergleichung zum Anfangswert ψ_0 bei $t = 0$ und A eine Observable. Verifizieren Sie:

$$\langle A \rangle_{\psi(t)} = \langle A_H(t) \rangle_{\psi_0},$$
$$\frac{d}{dt}\langle A \rangle_{\psi(t)} = \langle \dot{A}_H(t) \rangle_{\psi_0} \,.$$

c) Inspiriert durch Beziehung (1) für die erste Zeitableitung eines Operators im Heisenberg-Bild vermuten wir, dass höhere Zeitableitungen auf gleiche Weise durch Iteration der Operation $\frac{i}{\hbar}[H, \cdots]$ gebildet werden können:

$$\begin{aligned}
\dot{A}_H(t) &= \left(\frac{i}{\hbar}[H, \cdots]\right) A_H(t) \;:=\; \frac{i}{\hbar}[H, A_H(t)]\,, \\
\ddot{A}_H(t) &= \left(\frac{i}{\hbar}[H, \cdots]\right)^2 A_H(t) \;=\; \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 [H, [H, A_H(t)]]\,, \\
&\vdots \\
A_H^{(n)}(t) &= \left(\frac{i}{\hbar}[H, \cdots]\right)^n A_H(t) \;=\; \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \underbrace{[H, [H, \ldots, [H}_{n \text{ mal}}, A_H(t)] \ldots]]\,.
\end{aligned}$$

Beweisen Sie diese Beziehungen. [Hinweis: Überlegen Sie sich, dass Sie dazu eigentlich nur $\dot{A}_H(t) \overset{!}{=} U(t)^\dagger \dot{A}_H(0) U(t)$ zeigen müssen.]

d) Begründen Sie anhand der Taylor-Reihe von $A_H(t)$ um $t = 0$ und mit Hilfe von **c)**, dass

$$A_H(t) \;=\; \exp\left(\frac{i}{\hbar}[H, \cdots] t\right) A_H(0)\,.$$

9. Larmorpräzession im Heisenberg-Bild *3+5+2+3=13 Punkte*

Wir betrachten noch einmal die Larmorpräzession eines Spins im Magnetfeld Be_3, diesmal im Heisenberg-Bild (vgl. vorherige Aufgabe). Die Dynamik ist beschrieben durch den Hamiltonian

$$H = -B\mu_0\sigma_3.$$

Zur Berechnung des Erwartungswerts des Magnetischen Moments $\vec{\mu}$ mit den Kompoenten $\mu_l = \mu_o \sigma_l$ benötigen wir die Pauli-Operatoren σ_l im Heisenberg-Bild,

$$(\sigma_l)_H(t) = U(t)^\dagger \sigma_l U(t)\,, \qquad U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\,.$$

a) Verifizieren Sie durch direktes Nachrechnen:

$$[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3, \qquad [\sigma_2, \sigma_3] = 2i\sigma_1, \qquad [\sigma_3, \sigma_1] = 2i\sigma_2.$$

b) Zeigen Sie mit **8d)** (oder alternativ mit den verallgemeinerten Euler-Formelen aus Aufgabe **5**), dass

$$\vec{\sigma}_H(t) := \begin{pmatrix} (\sigma_1)_H(t) \\ (\sigma_2)_H(t) \\ (\sigma_3)_H(t) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \cos(\Omega t)\,\sigma_1 + \sin(\Omega t)\,\sigma_2 \\ -\sin(\Omega t)\,\sigma_1 + \cos(\Omega t)\,\sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}, \qquad \Omega = \frac{2B\mu_0}{\hbar}\,.$$

c) Ermitteln Sie mit dem Ergebnis des vorherigen Aufgabenteils den Erwarungswert $\langle \mu_x \rangle_{\psi(t)}$ für den Anfangswert $\psi(0) = \varphi_{x+}$.

d) Erschließen Sie ausgehend vom Ergebnis **9b)** die physikalische Bedeutung des Operators

$$\cos(\alpha)\,\sigma_1 \;-\; \sin(\alpha)\,\sigma_2\,.$$

Bestimmen Sie seine Eigenwerte und Eigenvektoren. Welche physikalischen Zustände beschreiben die normierten Eigenvektoren?