Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse

Theoretische Physik II – Quantenmechanik – Blatt 4

Sommersemester 2023

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/qm_2023.html/*

Abgabe: bis **Mittwoch, 10.05.23, 10:00** in elektronischer Form per ILIAS unter https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5154210.html

10. Zur Diskussion

0 Punkte

a) In welcher Beziehung stehen Translations- und Impulsoperator eines Teilchens?

b) Was ist der Kommutator von Orts- und Impulsoperator?

c) $|\psi\rangle$ und $|\chi\rangle$ seien Teilchenzustände mit Impulswellenfunktionen $\tilde{\psi}(k)$ und $\tilde{\chi}(k)$. Stellen Sie damit das Skalarprodukt $\langle\psi|\chi\rangle$ dar.

d) $|\varphi_x\rangle$ und $|\tilde{\varphi}_p\rangle$ seien die aus der Vorlesung bekannten Orts- und Impulseigenzustände. Was bedeuten die Ausdrücke

$$\langle\varphi_x|\varphi_{x'}\rangle, \quad \langle\varphi_x|\tilde{\varphi}_p\rangle, \quad \langle\tilde{\varphi}_p|\tilde{\varphi}_{p'}\rangle\ ?$$

11. Translation und Zeitentwicklung

3 Punkte

$U(t)$ und $T(s)$ seien Zeitentwicklung- und Translationsoperator eines Teilchens in einer Dimension. H und p seien Hamilton- und Impulsoperator des Systems. Zeigen Sie:

$$\text{für alle } t, s\text{:} \quad [U(t), T(s)] = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad [H, p] = 0$$

12. Kommutatorrelationen

3+2+5=10 Punkte

Im folgenden seien A und B Operatoren dessen Kommutator $[A, B]$ mit A kommutiert.

a) Beweisen Sie per Induktion:

$$[A^n, B] \;=\; nA^{n-1}[A, B], \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

b) Die Operatorfunktion $f(A)$ sei durch die Potenzreihe $f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n$ gegeben. Zeigen Sie

$$[f(A), B] \;=\; f'(A)[A, B]\,.$$

c) Es seien x und p Orts- und Impulsoperator eines Teilchen, die Funktion $U(x)$ in einer Potenzreihe entwickelbar, und a und b Konstanten geeigneter Dimenion. Vereinfachen Sie folgende Kommutatoren:

$$\frac{i}{\hbar}[p^2, x], \quad \frac{i}{\hbar}[x^2, p], \quad \frac{i}{\hbar}[U(x), p], \quad [e^{iax}, p], \quad [e^{ibp}, x].$$

13. Ehrenfest-Theorem

5+5=10 Punkte

Gemäß dem Ehrenfest-Theorem folgen die quantenmechanischen Erwartungswerte von Ort und Impuls eines Teilchens im gewissen Sinne den Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik. Für ein Teilchen in einer Dimension unter dem Einfluss eines Potenzials $U(x)$ besagt das Theorem, dass für eine allgemeine Lösung der Schrödingergleichung ψ_t

$$\frac{d}{dt}\langle x\rangle_{\psi_t} \;=\; \frac{1}{m}\langle p\rangle_{\psi_t}\,, \quad \frac{d}{dt}\langle p\rangle_{\psi_t} \;=\; -\langle U'(x)\rangle_{\psi_t}\,.$$

a) Beweisen Sie diese Beziehungen.

b) Für welche Klasse von Potenzialen $U(x)$ genügen die quantenmechanischen Erwartungswerte von Ort und Impuls *exakt* den klassischen Bewegungsgleichungen? D.h. für welche $U(x)$ ist

$$\langle x\rangle_{\psi_t} = x_{kl}(t)\,, \qquad \langle p\rangle_{\psi_t} = p_{kl}(t)$$

wobei $x_{kl}(t)$ und $p_{kl}(t)$ Lösungen der klassischen Bewegungsgleichugen zu Anfangswerten $x_{kl}(0) = \langle x\rangle_{\psi_0}$ und $p_{kl}(0) = \langle p\rangle_{\psi_0}$ sind? Gilt dies z.B. für einen harmonischen Oszillator?

14. Zeitentwicklung eines Gaußschen Wellenpakets

4+6=10 Punkte

Die Wellenfunktion eines anfangs auf einem Raumbereich der Ausdehnung σ lokalisierten freien Teilchens bleibt nicht auf diesen Raumbereich beschränkt, sondern dehnt sich mit der Zeit immer weiter aus und ist für $t \gg \tau = 2m\sigma^2/\hbar$ auf einen Raumbereich der Ausdehnung $\sigma_t \approx \sigma t/\tau$ lokalisiert. Dieser Sachverhalt soll in dieser Aufgabe geklärt werden. Wir betrachten ein freies Teilchen der Masse m in einer Dimension.

a) Zur Zeit $t = 0$ sei der Teilchenzustand $|\psi(0)\rangle$ durch eine Impulswellenfunktion $\tilde{\psi}(k)$ beschrieben. Überzeugen Sie sich davon, dass sich $|\psi(0)\rangle$ in der Zeit t zu einem Teilchenzustand $|\psi(t)\rangle$ mit Impulswellenfunktion

$$\tilde{\psi}(k,t) \;=\; e^{-i\frac{\hbar k^2}{2m}t}\;\tilde{\psi}(k)$$

entwickelt.

b) Nun sei zur Zeit $t = 0$ der Teilchenzustand $|\psi(0)\rangle$ durch eine gaußförmige Wellenfunktion gegeben:

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}}e^{-x^2/4\sigma^2}\,.$$

Bestimmen Sie die Wellenfunktion $\psi(x,t)$ des Teilchens zur einer allgemeinen Zeit $t \neq 0$.
Zur Kontrolle: die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte des Zustands $|\psi(t)\rangle$ ist wie die des Zustands $|\psi(0)\rangle$ eine Gaußfunktion,

$$|\psi(x,t)|^2 \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}}e^{-x^2/2\sigma_t^2},$$

allerdings mit einer zeitlich zunehmenden Varianz

$$\sigma_t^2 = (1 + \frac{t^2}{\tau^2})\,\sigma^2,$$

wobei $\tau = 2m\sigma^2/\hbar$.

Hinweise: →

Ermitteln Sie zuerst per Fouriertransformation die Impulswellenfunktion $\tilde{\psi}(k)$ des Teilchens zur Zeit $t = 0$, daraus nach **a)** die Impulswellenfunktion $\tilde{\psi}(k, t)$ zur Zeit t, und daraus schließlich mittels inverser Fouriertransformation die gesuchte Wellenfunktion $\psi(x, t)$. Die Fouriertransformationen gelingen mit der Identität:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-ax^2+bx} \; = \; \sqrt{\frac{\pi}{|a|}} \; e^{b^2/4a} \qquad a, b \in \mathbb{C}, \;\; \mathsf{Re}(a) > 0 \, .$$