Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse

Theoretische Physik II – Quantenmechanik – Blatt 5

Sommersemester 2023

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/qm_2023.html/*

Abgabe: bis **Mittwoch, 17.05.23, 10:00** in elektronischer Form per ILIAS unter https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5154210.html

15. Zur Diskussion *0 Punkte*

a) Weshalb ist $[x, T(s)] = sT(s)$? ($T(s)$ ist die Translation um s.)

b) Was folgt aus **a)** für den Kommutator $[x, p]$?

16. Gebundene Zustände *6+4=10 Punkte*

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m in einer Dimension in einem beliebigen Potenzial $U(x)$ ($U(x) < \infty$).

a) Beweisen Sie: Gebundene Zustände des Teilchens (= normierbare Energieeigenzustände) sind nicht entartet. D.h. zwei normierbare Energieeigenfunktionen $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ zur ein und derselben Energie E sind zueinander proportional.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Größe $\psi_1'\psi_2 - \psi_1\psi_2'$ unabhängig von x ist (mit $'$ ist die Ableitung nach x gemeint).

b) Zeigen Sie, dass der Impulserwartungswert in einem gebundenden Zustand verschwindet.
Hinweis: Beweisen und verwenden Sie: $p = \frac{i}{\hbar}m[H, x]$.

17. Teilchen im δ-Potenzial *10 Punkte*

Ein Teilchen der Masse m ist im eindimensionalen Potenzial $U(x) = -u\delta(x)$ mit $u > 0$ gebunden. Bestimmen Sie Energie E (< 0) und Energieeigenfunktion $\psi_E(x)$ des einzigen gebundenen Zustands.

18. Teilchen im Kasten *6+6+3=15 Punkte*

Ein Teilchen der Masse m befindet sich in einem eindimensionalen Kasten mit undurchdringlichen Wänden bei $x = 0$ und $x = a$. Die gebundenen Zustände $|\psi_n\rangle$ besitzen bekanntlich normierte Energieeigenfunktionen

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(k_n x), \quad k_n = \frac{\pi}{a}n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

zu Eigenenergien $E_n = \hbar^2 k_n^2/2m$.

a) Bestimmen Sie für $i, j \in \{1, 2\}$ folgende Matrixelemente von Ort-, Impuls- und Hamilton-Operator:

$$x_{ij} = \langle\psi_i|x|\psi_j\rangle$$
$$p_{ij} = \langle\psi_i|p|\psi_j\rangle$$
$$H_{ij} = \langle\psi_i|H|\psi_j\rangle$$

Hinweise: $\int_0^\pi dx\, x\, \sin x\, \sin 2x = -\frac{8}{9}$, $\int_0^\pi dx\, \cos x\, \sin 2x = \frac{4}{3}$.

b) Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das System im Zustand $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle)$. Bestimmen Sie unter Verwendung der unter **a)** ermittelten Matrixelementen die Erwartungswerte von Ort, Impuls und Energie des Teilchens für $t \geq 0$.

c) Nun befinde sich das Teilchen zur Zeit $t = 0$ in einem Zustand $|\chi\rangle$ mit konstanter Wellenfunktion $\chi(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}$, d.h. das Teilchen ist zum Zeitpunkt $t = 0$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit an jedem Ort im Kasteninneren anzutreffen. Zur Zeit $t = 0$ werde die Energie des Teilchens gemessen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt die Messung den Wert E_n? Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dieser Wert nach einer Zeit t gemessen?