Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse

Theoretische Physik II – Quantenmechanik – Blatt 6

Sommersemester 2023

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/qm_2023.html/*

Abgabe: bis **Mittwoch, 24.05.23, 10:00** in elektronischer Form per ILIAS unter https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5154210.html

19. Zur Diskussion

0 Punkte

a) Erläutern Sie kurz die Struktur des Grundzustands und des ersten angeregten Zustands eines Teilchens im Doppelkastenpotenzial.

b) Weshalb beginnt ein Teilchen zwischen den beiden Kästen zu oszillieren, wenn es sich anfänglich in einem Kasten befindet? Wodurch ist die Frequenz bestimmt?

20. Spin-Resonanz

2+3+7=12 Punkte

Die Spin-Zustände $|z\pm\rangle$ eines Elektrons (z.B. des ^2S- Elektrons im Be$^+$-Ion, vgl. Vrlsg.) weisen geringfügig unterschiedliche Energien $E_\pm = \pm\frac{1}{2}\epsilon$ auf ($\epsilon \neq 0$). In einem Experiment soll der Spin-Zustand kontinuierlich zwischen den beiden Zuständen $|z+\rangle$ und $|z-\rangle$ oszillieren. Zu diesem Zweck wird ein elektromagnetisches Feld mit einem in der xy-Ebene rotierenden Magnetfeld $\mathbf{B}(t) = B_0(\cos(\omega t)\mathbf{e}_x + \sin(\omega t)\mathbf{e}_y)$ eingestrahlt. Über die Wechselwirkung $-\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\mu}$ mit dem magnetischen Moment $\boldsymbol{\mu} = \mu_0(\sigma_1\mathbf{e}_x + \sigma_2\mathbf{e}_y + \sigma_3\mathbf{e}_z)$ des Spins resultiert hieraus der zeitabhängige Wechselwirkungsoperator

$$W(t) = u(\cos(\omega t)\sigma_1 + \sin(\omega t)\sigma_2),$$

wobei $u = -\mu_0 B_0$. Mit dem Hamiltonoperator $H_0 = \frac{\epsilon}{2}\sigma_3$ des ungestörten Systems erhalten wir somit einen zeitabhängigen Hamiltonoperator

$$H(t) = H_0 + W(t).$$

für das System mit Magnetfeld,

a) Zeigen Sie:

$$H(t) = \begin{pmatrix} \frac{\epsilon}{2} & u\,\mathrm{e}^{-i\omega t} \\ u\,\mathrm{e}^{+i\omega t} & -\frac{\epsilon}{2} \end{pmatrix}.$$

b) Zur Bestimmung einer allgemeinen Lösungen $\psi(t)$ der Schrödingergleichung verwenden wir den Ansatz

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} a_+(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t/2} \\ a_-(t)\,\mathrm{e}^{+i\omega t/2} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die zeitabhängigen Koeffizienten $a_\pm(t)$ folgendem Differenzialgleichungssystem genügen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix} = -\frac{i}{\hbar}\begin{pmatrix} \frac{\epsilon-\hbar\omega}{2} & u \\ u & -\frac{\epsilon-\hbar\omega}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix}.$$

c) Lösen Sie das Differenzialgleichungssystem unter **c)** für den Fall einer elektromagnetischen Welle mit *resonanter* Frequenz $\omega = \epsilon/\hbar$. Bestimmen Sie damit die zeitliche Entwicklung eines Anfangszustands $|\psi(0)\rangle = |z+\rangle$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit $P_+(t)$ liegt zur Zeit t der Zustand $|z+\rangle$ vor? Skizzieren Sie $P_+(t)$ für $0 < t < 2\pi\hbar/|u|$.

Hinweis: Zur Lösung des DGL-Systems $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix}$ betrachten.

21. Wahrscheinlichkeitsstromdichten *5 Punkte*

Gegeben seien Wellenfunktionen

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \mathrm{e}^{ikx} + r\,\mathrm{e}^{-ikx}, \\ \psi_2(x) &= t\,\mathrm{e}^{ikx}, \qquad\qquad r, t \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

eines Teilchens der Masse m in einer Dimension. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsstromdichten dieser Wellenfunktionen gegeben sind durch

$$\begin{aligned} j_1(x) &= \frac{p}{m}\,(1 - |r|^2)\,, \\ j_2(x) &= \frac{p}{m}\,|t|^2\,, \qquad\qquad p = \hbar k\,. \end{aligned}$$

22. Streuung am δ-Potenzial *8 Punkte*

Ein Teilchen der Masse m und mit Impuls $\hbar k$ (> 0) wird am eindimensionalen Potenzial $U(x) = u\delta(x)$ gestreut. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird das Teilchen an der Potenzialbarriere reflektiert? Überprüfen Sie Ihr Ergebnis auf Plausibilität in den Grenzfällen $|u| \to \infty$, $u \to 0$, $k \to \infty$ und im klassischen Grenzfall $\hbar \to 0$.

Hinweise: Verwenden Sie den Streuansatz $\psi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{ikx} + r\,e^{-ikx} & : x < 0 \\ t\,\mathrm{e}^{ikx} & : x \geq 0 \end{cases}$ und überlegen Sie sich geeignete Anschlussbedingungen bei $x = 0$.