Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse

Theoretische Physik II – Quantenmechanik – Blatt 7

Sommersemester 2023

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/qm_2023.html/*

Abgabe: bis **Mittwoch, 07.06.23, 10:00** in elektronischer Form per ILIAS unter https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5154210.html

23. Zur Diskussion *0 Punkte*

a) Wie lautet die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j(x,t)$ eines eindimensionalen Teilchenzustands mit Wellenfunktion $\psi(x,t)$?

b) In welcher Beziehung bestehen Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2$ und Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j(x,t)$ eines allgemeinen Teilchenzustands?

24. Impulsdarstellung *7×2=14 Punkte*

In dieser Aufgabe überzeugen Sie sich davon, dass Orts- und Impulsdarstellungen im wesentlichen äquivalente Beschreibungen eines Teilchenzustands sind. Inbesondere entspricht der Orstdarstellung $-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ des Impulsoperators die Impulsdarstellung $i\frac{\partial}{\partial k}$ des Ortsoperators. Zeigen Sie:

a) Ist $\tilde{\psi}(k)$ die Impulswellenfunktion eines Teilchenzustands $|\psi\rangle$, dann ist $i\frac{\partial}{\partial k}\tilde{\psi}(k)$ die Impulswellenfunktion des Zustands $\hat{x}\,|\psi\rangle$.

b) $\langle x\rangle_{|\psi\rangle} \;=\; \int \frac{dk}{2\pi}\,\tilde{\psi}^*(k)\left(i\frac{\partial}{\partial k}\right)\tilde{\psi}(k)\,, \qquad \langle p\rangle_{|\psi\rangle} \;=\; \int \frac{dk}{2\pi}\,\tilde{\psi}^*(k)\,(\hbar k)\,\tilde{\psi}(k)\,.$

c) Der Operator

$$\tilde{T}(p_0) \;:=\; e^{\frac{i}{\hbar}p_0\hat{x}}, \quad p_0 \in \mathbb{R}$$

ist die *Impuls-Translation um den Impuls* p_0, d.h. $\tilde{T}(p_0)\,|\tilde{\varphi}_p\rangle = |\tilde{\varphi}_{p+p_0}\rangle$.

d) $\tilde{T}(p_0)$ ist unitär und es gilt $[p, \tilde{T}(p_0)] = p_0\tilde{T}(p_0)\,.$

e) $\langle p\rangle_{\tilde{T}(p_0)|\psi\rangle} \;=\; p_0 + \langle p\rangle_{|\psi\rangle}\,.$

f) Ist $\psi(x)$ die Ortswellenfunktion eines Zustands $|\psi\rangle$, dann ist $\mathrm{e}^{ik_0x}\psi(x)$ die Ortswellenfunktion des Zustands $\tilde{T}(\hbar k_0)\,|\psi\rangle$.

g) Ist $\tilde{\psi}(k)$ die Impulswellenfunktion eines Zustands $|\psi\rangle$, dann ist $\mathrm{e}^{-ikx_0}\tilde{\psi}(k)$ die Impulswellenfunktion des um x_0 translatierten Zustands $T(x_0)\,|\psi\rangle$.

25. Elektron-Reflexion am Metall *6 Punkte*

Ein Strahl monoenergetische Elektronen wird senkrecht auf eine Metalloberfläche gerichtet. Im Metall liegt das Potenzial $-W = -8eV$ vor, die Elektronen im Strahl haben die Energie $+0.1eV$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden die Elektronen an der Metalloberfläche reflektiert?

26. Feldemission *6 Punkte*

Unter dem Einfluss eines starken elektrischen Felds senkrecht zur Oberfläche eines Metalls werden Leitungselektronen aus dem Metall gelöst. Zur Beschreibung dieses als *Feldemission* bezeichneten Phänomens verwenden wir ein vereinfachtes 1D Modell-Potenzial

$$U(x) = \begin{cases} -W & : \quad x < 0 \qquad \text{(Metall, feldfrei)} \\ -e\mathcal{E}x & : \quad x > 0 \qquad \text{(Vakuum + elektr. Feld)}\,, \end{cases} \tag{1}$$

wobei $W > 0$ die Austrittsarbeit, $\mathcal{E}$ die elekrische Feldstärke und e die Elementarladung bezeichnet ($e\mathcal{E}$ positiv). Zudem nehmen wir an, dass sich im Metall Elektronen bei einer Energie $-W < E < 0$ befinden und diese die Potenzialbarriere an der Metalloberfläche durchtunneln. Das Resultat ist ein Tunnelstrom $I = I_0 T$, wobei I_0 ein konstanter Parameter und T die durch E und $U(x)$ bestimmte Transmissionswahrscheinlichkeit ist. Bestimmen Sie T in Gamow-Näherung

$$T = \exp(-\frac{1}{\hbar}\int \sqrt{8m(V(x)-E)}\,dx)$$

und damit den Tunnelstrom I als Funktion von E und $\mathcal{E}$. Angenommen $E = -1eV$, ab welcher elektrischen Feldstärke $\mathcal{E}$ können Sie mit einem signifikannten Tunnelstrom rechnen?

27. Harmonischer Oszillator *6 Punkte*

Ein Teilchen der Masse m oszilliert im harmonischen Potenzial $\frac{1}{2}m\omega^2\,x^2$. Zur Zeit $t = 0$ befindet es sich in einer Superposition des Grundzustands $|0\rangle$ und des ersten angeregtes Zustands $|1\rangle$,

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right).$$

Berechnen Sie die Erwartungswerte von Ort und Impuls des Teilchens zur Zeit t. Verwenden Sie dazu folgende Beziehungen (vgl. Vorlesung):

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger + a), \quad \hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a^\dagger - a), \quad a^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\,, \quad a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\ .$$