Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse

Theoretische Physik II – Quantenmechanik – Blatt 8

Sommersemester 2023

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/qm_2023.html/*

Abgabe: bis **Mittwoch, 14.06.23, 10:00** in elektronischer Form per ILIAS unter https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5154210.html

Wer möchte, kann an einer Umfrage der Uni Darmstadt teilnehmen.
Studierende unter: `https://t1p.de/Stud` Tutor*innen unter: `https://t1p.de/Tuts`

28. Zur Diskussion *0 Punkte*

a und $a^\dagger$ seien Vernichter- und Erzeugeroperator eines harmonischen Oszillators der Frequenz ω.

a) Was ist $[a, a^\dagger]$?

b) Wie lautet der Hamilton-Operator des harmonischen Oszillators in a und $a^\dagger$?

c) Welche Werte nehmen folgende Ausdrücke an?

$$\langle 2|a^\dagger a|2\rangle, \quad \langle 2|a|2\rangle, \quad \langle 2|aa^\dagger|2\rangle, \quad \langle 0|a|1\rangle, \quad \langle 2|a^\dagger|1\rangle.$$

29. Orts- und Impulsvarianz in Ozillatorzuständen *6 Punkte*

a und $a^\dagger$ seien die aus der Vorlesung bekannten Vernichter- und Erzeugeroperatoren eines harmonischen Oszillators mit Masse m und Frequenz ω. Zeigen Sie, dass damit die Quadrate von Orts- und Impulsoperator dargestellt werden können als

$$x^2 = l^2 \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}({a^\dagger}^2 + a^2) \right) \qquad \text{und} \qquad p^2 = \frac{\hbar^2}{l^2} \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}({a^\dagger}^2 + a^2) \right) ,$$

wobei $l = \sqrt{\hbar / m\omega}$ die charakteristische Länge des Oszillators ist. Ermitteln Sie anhand dieser Beziehungen die Erwartungswerte von x^2 und p^2 in den Energieeigenzuständen $|n\rangle$ des Oszillators. Welchen Wert erhalten Sie für das Produkt von Orts- und Impulsunschärfe $\Delta x \Delta p = (\langle x^2 \rangle \langle p^2 \rangle)^{1/2}$ im n-ten Eigenzustand?

30. Harmonischer Oszillator *2+3=5 Punkte*

a) Begründen Sie, dass die Eigenfunktionen $\varphi_n(x)$ eines harmonischen Oszillators für gerade n symmetrische und für ungerade n antisymmetrische Funktionen sind.

b) Ein Teilchen der Masse m bewege sich im eindimensionalen Potenzial

$$U(x) = \begin{cases} \infty & : \quad x \leq 0 \\ \frac{m\omega^2}{2} x^2 & : \quad x > 0 \end{cases}$$

Wie lauten die Eigenenergieen des Systems?

31. Baker-Campbell-Hausdorff-Identität *8 Punkte*

Für Operatoren A und B, die jeweils mit dem Kommutator $[A, B]$ vertauschen, gilt die Identität

$$\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B} \;=\; \mathrm{e}^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}\,. \tag{1}$$

Beweisen Sie diese Identiät, indem Sie zuerst zeigen, dass die operatorwertige Funktion

$$f_1(t) := \mathrm{e}^{At}\mathrm{e}^{Bt}$$

eine spezielle Lösung der Differenzialgleichung

$$\dot{f}(t) \;=\; (\,A + B + [A, B]t\,)f(t)$$

zum Anfangswert $\mathbf{1}$ bei $t = 0$ ist. Duch direkte Integration der DGL können Sie diese spezielle Lösung ebenfalls erhalten, was Ihnen für $t = 1$ dann die zu beweisenden Identität liefert. Beim Umformen der Ableitung von $f_1(t)$ ist die in Aufgabe **8b)** gezeigte* Identität

$$\mathrm{e}^{A}B\mathrm{e}^{-A} \;=\; \mathrm{e}^{[A,\dots]}B \;\equiv\; B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}[A, [A, [A, B]]] + \cdots$$

hilfreich. Die Identität (1) ist ein Spezialfall der allgemeineren *Baker-Campbell-Hausdorff-Identität*.

32. Kohärente Zustände *2 × 5 = 10 Punkte*

a und $a^\dagger$ seien Vernichter- und Erzeugeroperatoren eines harmonische Oszillators der Frequenz ω. Für $\alpha \in \mathbb{C}$ ist der Displacement-Operator $D(\alpha)$ gegeben durch

$$D(\alpha) \;=\; \mathrm{e}^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a},$$

der kohärente Zustand $|c(\alpha)\rangle$ des Oszillators ist definiert durch

$$|c(\alpha)\rangle \;:=\; D(\alpha)\,|0\rangle$$

(vgl. Vorlesung).

a) Was ist die physikalische Bedeutung des Operators $D(\alpha)$? Was ergibt sich damit für die Erwartungswerte von x, p bzw. deren Varianzen $(x - \langle x\rangle)^2$, $(p - \langle p\rangle)^2$ im kohärenten Zustand $|c(\alpha)\rangle$?

b) Zeigen Sie, dass

$$D(\alpha) \;=\; \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\mathrm{e}^{\alpha a^\dagger}\mathrm{e}^{-\alpha^* a}\,.$$

c) Zeigen Sie mittels **b)**, dass

$$|c(\alpha)\rangle \;=\; \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle\;.$$

d) Zeigen Sie mittels **c)**, dass

$$U(t)\,|c(\alpha)\rangle \;=\; \mathrm{e}^{-i\omega t/2}\,|c(\mathrm{e}^{-i\omega t}\alpha)\rangle\;.$$

Interpretieren Sie dieses Ergebnis. $U(t)$ ist wie immer der Zeitentwicklungoperator.

e) Zeigen Sie, dass $|c(\alpha)\rangle$ ein (rechter) Eigenvektor des Operators a zum Eigenwert α ist, d.h.

$$a\,|c(\alpha)\rangle \;=\; \alpha\,|c(\alpha)\rangle\;.$$

---

*setze dazu $iHt/\hbar \equiv A$ und $A_H(0) \equiv B$