Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse

Theoretische Physik II – Quantenmechanik – Blatt 8

Sommersemester 2023

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/qm_2023.html/*

Abgabe: bis **Mittwoch, 21.06.23, 10:00** in elektronischer Form per ILIAS unter https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5154210.html

33. Zur Diskussion *0 Punkte*

a) Wie lautet die Grundzustandswellenfunktion eines harmonischen Osillators?

b) Wie lautet die Wellenfunktion des kokärenten Oszillatorszustands $|c(\alpha)\rangle$?

34. Vollständigkeit kohärenter Zustände *3+7=10 Punkte*

Die kohärenten Zustände $\{|c(\alpha)\rangle\}_{\alpha\in\mathbb{C}}$ eines harmonische Oszillators bilden ein *nicht*-orthogonales vollständings Systems. Genauer gilt:

$$(i) \quad |\langle c(\alpha)|c(\beta)\rangle|^2 \;=\; \mathrm{e}^{-|\alpha-\beta|^2},$$

$$(ii) \quad \frac{1}{\pi}\int \mathrm{d}u \int \mathrm{d}v \; |c(u+iv)\rangle \, \langle c(u+iv)| \;=\; \mathbf{1}\,.$$

a) Zeigen Sie (i) mittels der Darstellung eines kohärenten Zustands aus Aufgabe **32 c)**.

b) Beweisen Sie (ii), indem Sie Matrixelemente $\langle m|\ldots|n\rangle$ der Identität bzgl. beliebiger Oszillatorzustände $|m\rangle\,,|n\rangle$ betrachten.

Hinweise: **32 c)** hilft auch hier weiter, das zweidimensionale Integral berechnet sich am einfachsten in Polarkoordinaten: $u+iv = r\mathrm{e}^{i\varphi}$, das r-Integral kann durch eine geeignete Substitution in $\int_0^\infty t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \;=\; \Gamma(n+1) = n!$ überführt werden.

35. Störungstheorie *6+2=8 Punkte*

Ein harmonischer Oszillator mit Hamiltonoperator

$$H_0 \;=\; \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

erfährt eine lineare Störung

$$H_1 = \hbar\omega\frac{x}{l}, \qquad l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,.$$

Ermitteln Sie die Energieniveaus $E_n(\lambda)$ des gestörten Systems $H(\lambda) = H_0 + \lambda H_1$

a) in Störungstheorie einschließlich zweiter Ordnung in λ,

b) indem Sie durch eine geeignete Koordinatentransformation $H(\lambda)$ auf die Standardform eines harmonischen Oszillators bringen.

36. Niveauabstoßung

2+3+2=7 Punkte

Der Hamiltonoperator eines Zwei-Zustand-Systems sei $H = H_0 + \lambda H_1$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) mit

$$H_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_1 = \begin{pmatrix} 0 & d \\ d^* & 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon \in \mathbb{R}_+,\ d \in \mathbb{C}\,.$$

a) Bestimmen Sie die exakten Energieniveaus $E_0 < E_1$ des Systems. Skizzieren Sie diese für $\varepsilon = d = 1$ als Funktion von λ.

b) Fassen Sie nun H_1 als Störung des Hamiltonoperators H_0 auf. Wie lauten die Energieniveaus E_0, E_1 in Störungstheorie erster bzw. zweiter Ordnung in λ? Skizzieren Sie die störungstheoretischen Energieniveaus als Funktion von λ für den Fall $\varepsilon = d = 1$ und vergleichen Sie mit den exakten Niveaus aus **a)**.

c) Ermitteln Sie die Energieeigenzustände φ_0 und φ_1 für $\lambda = 0$ und in den Grenzfällen $\pm\lambda \gg |\varepsilon/d|$.