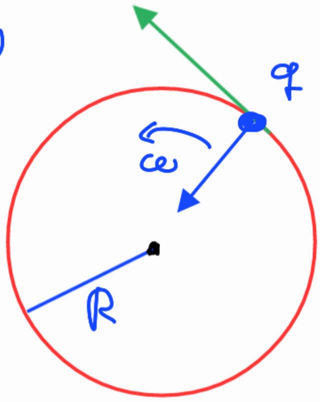
Lösungshinweise Blatt 11

42 a)



$\odot B$

Teilchen auf Kreisbahn mit Geschw. $\vec{v} = R\omega\,\vec{e}_\varphi$ erfährt Lorentz-kraft $\vec{F} = -\frac{q}{c}\,\vec{v}\times\vec{B}$

$$\to \text{Newton: } \quad m R \omega^2 \overset{!}{=} \frac{qB}{c} R\omega$$

$$\to \quad \omega_c = qB/mc$$

b)

$$\mathrm{rot}\begin{pmatrix} 0 \\ x_1 B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$$

c)

$$E\,\psi_k(x_1,x_2) \overset{!}{=} \frac{1}{2m}\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{q}{c}Bx_1\right)^2\right)\varphi_k(x_1)\,e^{ikx_2}$$

$$\Leftrightarrow \quad E\,\varphi_k(x_1) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \underbrace{\frac{1}{2m}\left(\hbar k - \frac{q}{c}Bx_1\right)^2}_{= \frac{m}{2}\underbrace{\left(\frac{qB}{mc}\right)^2}_{=\omega_c^2}\Big(x_1 - \underbrace{\frac{\hbar c}{qB}}_{\hbar/m\omega_c =:\, \ell_c^2}k\Big)^2}\right)\varphi_k(x_1)$$

$$\Leftrightarrow \quad E\,\varphi_k(x_1) = \underbrace{\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{m\omega_c^2}{2}\left(x_1 - \ell_c^2 k\right)^2\right)}_{\text{harm. Osz., Frequenz } \omega_c,\ x_0 = \ell_c^2 k}\varphi_k(x_1)$$

$\rightarrow$ Spektrum: $E_n = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2})$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

(Landau-Niveaus)

jedes Landau-Niveau ist <u>∞-fach entartet</u>, da

k beliebig gewählt werden kann;

$$\psi_{n,k}(x_1, x_2) = \varphi_n(x_1 - \ell_c^2 k)\, e^{ikx_2}$$

n-te Eigenfunkt. des harm. Osz. $\ell = \ell_c$

Ebene Welle in x_2 Richtung

43 a)

$$[L_1, L_2] = [x_2 p_3 - x_3 p_2, x_3 p_1 - x_1 p_3]$$

$$= \underbrace{[x_2 p_3, x_3 p_1]}_{= -i\hbar x_2 p_1} - \underbrace{[x_2 p_3, x_1 p_3]}_{=0} - \underbrace{[x_3 p_2, x_3 p_1]}_{=0} + \underbrace{[x_3 p_2, x_1 p_3]}_{i\hbar x_1 p_2}$$

$$= i\hbar (x_1 p_2 - x_2 p_1) = i\hbar L_3$$

b) nach Aufgabe 11 (Blatt 2) mit L_1, L_2

auch $i[L_1, L_2] = -\hbar L_3$ Erhaltungsgröße.

44 a)

$$\frac{d}{d\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \underbrace{r(-\sin\varphi)}_{=-x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \underbrace{r\cos\varphi}_{=x_1} \right)_{\substack{x_1 = r\cos\varphi \\ x_2 = r\sin\varphi}}$$

$$= \left(-x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) f(x_1, x_2)$$

b)

$$L_3 \psi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 p_2 - x_2 p_1) \psi(x_1, x_2, x_3)$$

$$= i\hbar \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \psi(x_1, x_2, x_3)$$

$$\overset{a)}{=} -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \psi(r, \varphi, z)$$

c) Ansatz in $L_3 \psi_\lambda = \lambda \psi_\lambda$ führt mit b)

auf $\frac{\partial}{\partial\varphi} g(\varphi) = \frac{i}{\hbar} \lambda g(\varphi) \rightarrow g(\varphi) = g_0 e^{i\lambda\varphi/\hbar}$

2π-Periodizität bedingt $e^{i 2\pi\lambda/\hbar} = 1$

d.h. $\lambda/\hbar \in \mathbb{Z}$;

($\{ e^{in\varphi} \}_{n \in \mathbb{Z}}$ ist nach Fourier vollst. System

2π-period. Fkten $\rightarrow$ alle EWe von L_3 sind ganzzahlige Vielfache von $\hbar$.)