Lösungshinweise Blatt 2

7 a) z.z.: für allg. $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ ist $\left(\sum_{i=1}^{n} |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\right)|\psi\rangle \overset{!}{=} |\psi\rangle$.

entwickle $|\psi\rangle$ in Basis $\mathcal{B}$: $|\psi\rangle = \sum_{j=1}^{n} \psi_j |\varphi_j\rangle$

$$\rightsquigarrow \left(\sum_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\right)|\psi\rangle = \sum_{ij} \psi_j |\varphi_i\rangle\underbrace{\langle\varphi_i|\varphi_j\rangle}_{\delta_{ij}} = \sum_j \psi_j |\varphi_j\rangle = |\psi\rangle \quad \blacksquare$$

alternativ:

$$\sum_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| = \sum_i P_{|\varphi_i\rangle} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$$

7 b)

$$E_{ij} = |\varphi_i\rangle\langle\varphi_j| = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \leftarrow \text{i-te Reihe}$$

$\uparrow$ j-te Spalte

7 c)

$$A = \mathbb{1}_{\mathcal{H}} A \mathbb{1}_{\mathcal{H}} = \sum_{ij} |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|A|\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|$$

$$= \sum_{ij} \langle\varphi_i|A|\varphi_j\rangle\, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_j| \,.$$

7 d)

$$A \overset{c)}{=} \sum_{ij} \langle\varphi_i|A|\varphi_j\rangle E_{ij} \overset{b)}{=} \begin{pmatrix} \langle\varphi_1|A|\varphi_1\rangle & \cdots & \langle\varphi_1|A|\varphi_n\rangle \\ \langle\varphi_2|A|\varphi_1\rangle & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \langle\varphi_n|A|\varphi_1\rangle & \cdots & \langle\varphi_n|A|\varphi_n\rangle \end{pmatrix}$$

7 e)

$$\left(|\varphi\rangle\langle\psi|\right)^+ = \left(\varphi^+\psi\right)^+ = \psi^+\left(\varphi^+\right)^+ = \psi^+\varphi = |\psi\rangle\langle\varphi| \; .$$

alternativ (und weniger formal):

für beliebige $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{H}$ gilt:

- $\langle \chi_1, (|\varphi\rangle\langle\psi|)\,\chi_2 \rangle = \langle \chi_1, \langle\psi, \chi_2\rangle\, \varphi \rangle = \langle \chi_1, \varphi\rangle \langle \psi, \chi_2 \rangle$
- $\langle (|\psi\rangle\langle\varphi|)\,\chi_1, \chi_2 \rangle = \langle \langle\varphi, \chi_1\rangle\, \psi, \chi_2 \rangle = \langle \chi_1, \varphi\rangle \langle \psi, \chi_2 \rangle$

$$\rightarrow \quad \left(|\varphi\rangle\langle\psi|\right)^+ = |\psi\rangle\langle\varphi| \; .$$

7 f)

$$A\,|\varphi_j\rangle = \sum_i c_i\, |\varphi_i\rangle \underbrace{\langle\varphi_i | \varphi_j\rangle}_{= \delta_{ij}} = c_j\, |\varphi_j\rangle$$

d.h. $c_1, \dots, c_n$ sind Eigenwerte zu Eigenvektoren $|\varphi_1\rangle, \dots, |\varphi_n\rangle$;

nach e) A hermitesch wenn c_i reell.

8) z.z.: Für beliebige $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle \in \mathcal{H}$ ist

$$\langle \varphi_1 | A | \varphi_2 \rangle = 0 \quad !$$

wähle $|\chi_1\rangle = |\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle$,

$$\rightarrow \quad 0 \overset{!}{=} \langle \chi_1 | A | \chi_1 \rangle = \overbrace{\langle\varphi_1|A|\varphi_1\rangle}^{=0} + \overbrace{\langle\varphi_2|A|\varphi_2\rangle}^{=0}$$

$$+ \langle\varphi_1|A|\varphi_2\rangle + \langle\varphi_2|A|\varphi_1\rangle$$

d.h. $\quad 0 = \langle \varphi_1 | A | \varphi_2 \rangle + \langle \varphi_2 | A | \varphi_1 \rangle \qquad (\mathrm{I})$

wähle nun $|\chi_2\rangle = |\varphi_1\rangle + \underline{i}\, |\varphi_2\rangle$,

$$\rightarrow \quad 0 \overset{!}{=} \langle \chi_2 | A | \chi_2 \rangle = \underbrace{\langle \varphi_1 | A | \varphi_1 \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle \varphi_2 | A | \varphi_2 \rangle}_{=0}$$

$$+ \underline{i} \langle \varphi_1 | A | \varphi_2 \rangle - \underline{i} \langle \varphi_2 | A | \varphi_1 \rangle$$

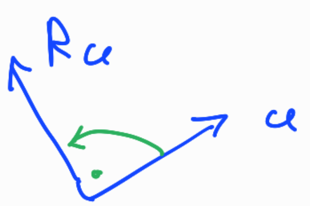
d.h. $\quad 0 = \langle \varphi_1 | A | \varphi_2 \rangle - \langle \varphi_2 | A | \varphi_1 \rangle \qquad (\mathrm{II})$

„I + II" $\longrightarrow \quad 0 = \langle \varphi_1 | A | \varphi_2 \rangle \qquad \blacksquare$

gilt in <u>euklidischen</u> VRen nicht!

<u>Gegenbeispiel</u> : Rotation in der Ebene um

$\vartheta = \pi/2$: $\quad R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \hat{=} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$



d.h. für <u>alle</u> $u \in \mathbb{R}^2$

$\langle u, Ru \rangle = 0$ und dennoch $R \neq 0$.

g) wie in Vrlsg (dort $B \parallel e_z$, hier $B \parallel e_x$):

Hamiltonian: $H = -B\mu_x = -B\mu_0\,\sigma_1$

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

→ Schrödingergl:

$$\dot\psi(t) = i\omega\,\sigma_1\,\psi(t)$$

$\omega := B\mu_0/\hbar$

→ Lsg zum Anfangszustand ψ_0 ist

$$\psi(t) = e^{i\omega t\sigma_1}\,\psi_0$$

$$= \left(\cos(\omega t)\,\mathbb{1} + i\,\sigma_1\sin(\omega t)\right)\psi_0$$

↑ Übg. 5.

hier $\psi_0 = \varphi_{z+} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

→ $\psi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ i\sin(\omega t) \end{pmatrix}$

→ $P_{z+}(t) = \cos^2(\omega t)$,

→ $\langle\mu_z\rangle_{\psi(t)} = \mu_0\left(\cos^2\omega t - \sin^2\omega t\right)$

$$= \mu_0\cos(2\omega t)$$

$$\langle \mu_y \rangle_{\psi(t)} = \mu_0 \left\langle \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ i\sin\omega t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ i\sin\omega t \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\mu_0 \sigma_2$

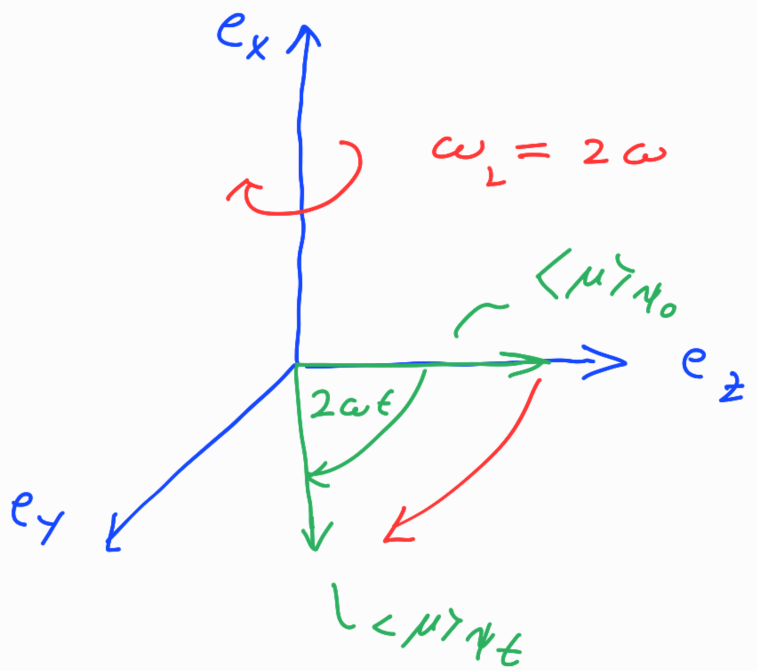
$$= \mu_0 \, 2 \cos\omega t \sin\omega t$$

$$= \mu_0 \sin(2\omega t)$$

$$\langle \mu_x \rangle_{\psi(t)} = \langle \mu_x \rangle_{\psi(0)} = \langle \mu_x \rangle_{e_{z+}} = 0$$

wegen $[\underbrace{H}_{-B\mu_0\sigma_1}, \underbrace{\mu_x}_{\mu_0\sigma_1}] = 0$ ist μ_x Erhaltungsgröße

$$\longrightarrow \langle \vec{\mu} \rangle_{\psi(t)} = \mu_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2\omega t \\ \cos 2\omega t \end{pmatrix}$$



$\hat{=}$ Spin-Präzession mit Larmorfrequenz

$$\omega_L = 2\omega = 2B\mu_0/\hbar \, .$$

10.

(i) $A[B,C] + [A,C]B = ABC - \cancel{ACB}$

$+ \cancel{ACB} - CAB = (AB)C - C(AB)$

$= [AB, C]$

(ii) l. S. $= \cancel{ABC} - \cancel{ACB} - \cancel{BCA} + \cancel{CBA}$

$+ \cancel{CAB} - \cancel{CBA} - \cancel{ABC} + \cancel{BAC}$

$+ \cancel{BCA} - \cancel{BAC} - \cancel{CAB} + \cancel{ACB} = 0$ $\boxtimes$

11.

a) $C^+ = -i(AB - BA)^+ = -i(\underbrace{(AB)^+}_{= BA} - \underbrace{(BA)^+}_{= AB})$

$= i(AB - BA) = C$.

b) A, B Erhaltungsgrößen

$\Rightarrow [H, A] = 0, \quad [H, B] = 0$

$\Rightarrow [H, i[A,B]] \overset{10\,(ii)}{=} -i[B, [\underbrace{H,A}_{=0}]] - i[A, [\underbrace{B,H}_{=0}]]$

$\overset{!}{=} 0$

d. h. $C = i[A,B]$ Erhaltungsgröße $\boxtimes$

<u>Hamilt. Mechanik</u>:

Poisson-klammer

A Erhaltungsgröße $\Leftrightarrow \{H, A\} = 0$

Poisson-Klammer erfüllt ebenfalls Jacobi-Identität: $\{A, \{B, C\}\} + \{C, \{A, B\}\} + \dots = 0$

$\rightarrow$ <u>gleiche Aussage</u>: A, B Erhaltungsgröße

$\Rightarrow$ $C := \{A, B\}$

Erhaltungsgröße.